Déduction Modulo
et
Élimination des Coupures :
Une approche syntaxique

Olivier Hermant

25 Juillet 2002

Sommario

L'eliminazione del taglio nel calcolo dei sequents è una proprietà molto importante, per poter implementare un algoritmo efficacie di ricerca di dimostrazione nella logica del primo ordine. È anche importante per provare la coerenza dello stesso calcolo dei sequents.
È stato introdotto da Gilles Dowek, Thérèse Hardin, Claude Kirchner e Benjamin Werner un nuovo tipo di regole di deduzione, chiamate deduzione modulare, che permette di comprimere fortemente la dimensione delle dimostrazione, provando sempre i stessi teoremi ma trascurando le tappe calcolatorie delle dimostrazione. La deduzione modulare permette anche di esprimere logiche più potente di quella del primo ordine.
Però nel caso generale perdiamo la proprietà di potere eliminare la regola di taglio in ogni dimostrazione. Ci sono stati diversi risultati provandolo per certe tipi di sistemi di riscrittura.
È anche stato introdotto da Dowek, Hardin e Kirchner [1] una estensione della resoluzione delle forme clausale, chiamata ENAR. Stuber [2] ha provato che per certi sistemi di regole di riscrittura, se un sequent aveva una dimostrazione in deduzione modulare, allora la sua forma clausale aveva una rifutazione in ENAR.
In questa tesina proviamo che tutti i sequents la cui forma clausale possiede una refutazione in ENAR possedono una dimostrazione senza taglio in deduzione modulare. Per questo, introduciamo un nuovo sistema di inferenze, il sistema R', le quale dimostrazione si traducono subito in deduzione modulare. Proviamo anche proprietà di cui non avevamo bisogno quando ci autorizzavamo di usare la regola di taglio.
Possiamo quindi, concatenendo il risultato di questa tesina e il risultato di Stuber, accedere a un nuovo modo di eliminare i tagli in deduzione modulare, per numerosi sistemi di riscrittura.

Chapter 1

Introduction

1.1 La déduction modulo

1.1.1 Le calcul des séquents

Le calcul des séquents est une méthode de démonstration de propositions à partir d'axiomes. C'est une méthode équivalente à la déduction naturelle, et donc équivalente au calcul des propositions de Hilbert [3].

Un séquent s'écrit de la manière suivante :

$$\Gamma \vdash \Delta$$

où Γ, Δ sont des ensembles de propositions. On dit Γ "thèse" Δ. Les propositions Γ sont appelées les axiomes, et les propositions de Δ les théorèmes. Une dérivation d'un séquent se fait avec des règles d'inférence.

Une règle d'inférence se représente de la manière suivante :

$$\frac{A_1,\ \ldots,\ A_n}{B}$$

on appellera $A_1, ..., A_n$ les prémisses et B la conclusion, $A_1, ..., A_n, B$ étant des séquents. L'ensemble des règles d'inférence du calcul des séquents est donné par la figure 1.1.

On dira qu'une variable est fraîche dans un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ si elle n'apparaît ni dans Γ, ni dans Δ. On notera $\{t/x\}P$ la substitution de t à x, où les variables liées de P sont éventuellement renommées pour éviter la capture de variables, et $\{x \mapsto t\}P$ le remplacement syntaxique de x par t.

La règle de coupure

Remarquons que la règle **cut** (ou règle de coupure) est la seule règle faisant intervenir une proposition P que nous ne retrouvons plus dans la conclusion. Cela veut dire que dans une démonstration, on peut être obligé d'introduire

$$\frac{}{P \vdash P}\text{axiom}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\text{cut}$$

$$\frac{\Gamma, P, P \vdash \Delta}{\Gamma, P \vdash \Delta}\text{contr-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P, P, \Delta}{\Gamma \vdash P, \Delta}\text{contr-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, P \vdash \Delta}\text{weak-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash P, \Delta}\text{weak-r}$$

$$\frac{\Gamma, P, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \wedge Q \vdash \Delta}\wedge\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta \quad \Gamma \vdash Q, \Delta}{\Gamma \vdash P \wedge Q, \Delta}\wedge\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash \Delta \quad \Gamma, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \vee Q \vdash \Delta}\vee\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P, Q, \Delta}{\Gamma \vdash P \vee Q, \Delta}\vee\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta \quad \Gamma, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \Rightarrow Q \vdash \Delta}\Rightarrow\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q, \Delta}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q, \Delta}\Rightarrow\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma, \neg P \vdash \Delta}\neg\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg P, \Delta}\neg\text{-r}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\bot\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma, \{t/x\}P \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x P \vdash \Delta}\forall\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{c/x\}P, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x P, \Delta}\forall\text{-r, } c \text{ constante fraîche}$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x P \vdash \Delta}\exists\text{-l, } c \text{ constante fraîche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x P, \Delta}\exists\text{-r}$$

Figure 1.1: règles d'inférence du calcul des séquents

une proposition complètement étrangère au séquent à démontrer. La tâche d'un programme de démonstration automatique est donc beaucoup plus compliquée, car nous devrons énumérer toutes les propositions possibles, à chaque fois que nous essayons d'appliquer la règle **cut**.

En calcul des séquents, cette règle est redondante et elle peut être éliminée de toutes les dérivations, grâce au théorème d'élimination des coupures suivant :

Théorème 1.1 *Si le séquent :*

$$\Gamma \vdash \Delta$$

a une preuve en calcul des séquents, alors il a aussi une preuve sans coupures en calcul des séquents.

Preuve : voir par exemple [3].

Donc on peut se limiter à chercher des preuves sans règle de coupure (on dira **"des preuves sans coupures"**), ce qui est beaucoup plus rapide.

La cohérence d'un système est le fait qu'on ne puisse pas démontrer n'importe quelle proposition dans ce système. Il peut exister des systèmes d'axiome incohérents, comme par exemple $A, \neg A$. Le théorème d'élimination des coupures a pour corollaire que le calcul des séquents dans la théorie vide est cohérent.

En effet, s'il était inchoérent, on aurait un démonstration de :

$$\vdash$$

En procédant par élimination sur la première règle appliquable à cette démonstration, on trouve que celle-ci doit forcément être la règle de coupure. D'après le théorème d'élimination des coupures, on possède aussi une preuve de ce séquent sans coupures, ce qui amène à une contradiction.

Le calcul des séquents est semi-décidable. Il existe un programme trouvant les démonstrations de tous les séquents en possédant une. Mais il n'esixte pas de programme permettant de savoir si un séquent possède une démonstration ou non, car ela violerait le théorème d'indécidabilité de Gödel.

1.1.2 La déduction modulo

Un grand nombre d'axiome dans la théorie sert en fait à effectuer des calculs, et de ce fait, allonge inutilement la démonstration. Par exemple pour prouver en ayant l'axiome de commutativité la proposition :

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

on a la preuve suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(a + (b + c) = (a + b) + c) \ \vdash \ a + (b + c) = (a + b) + c}\text{axiom}}{\forall z(a + (b + z) = (a + b) + z) \ \vdash \ a + (b + c) = (a + b) + c}\forall\text{-l}}{\forall y \forall z(a + (y + z) = (a + y) + z) \ \vdash \ a + (b + c) = (a + b) + c}\forall\text{-l}}{\forall x \forall y \forall z(x + (y + z) = (x + y) + z) \ \vdash \ a + (b + c) = (a + b) + c}\forall\text{-l}$$

On voudrait plutôt essayer de ramener chacune des propositions à une "forme normale", et ensuite on effectuerait ces calculs avec cette forme normale. Par exemple, réécrire toutes les propositions de la forme $(a+b)+c$ en $a+(b+c)$. Ainsi, la démonstration de la proposition précédente serait immédiate. Gilles Dowek, Thérèse Hardin, Claude Kirchner et Benjamin Werner ont formalisé cela, et ont fondé la théorie dans laquelle nous nous placerons.

Définition 1.2 *Une règle de réécriture sur un terme est une paire de termes $l \to r$ telle que les variables de r apparaissent dans l.*
Un axiome équationnel est une paire de termes $l = r$.
Une règle de réécriture propositionnelle est une paire de propositions $l \to r$ telle que l soit atomique et que les variables libres de r apparaissent dans l.

Exemple de règle de réécriture sur un terme :

$$x * 0 \to 0$$

Exemple d'axiome équationnel :

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

Exemple de règles de réécriture sur une proposition atomique :

$$x * y = 0 \to (x = 0) \vee (y = 0)$$

Un système de réécriture est une paire notée $\mathcal{RE}$ composée de :

- $\mathcal{R}$: un ensemble de règles de réécritures propositionnelles.
- $\mathcal{E}$: un ensemble de règles de réécritures sur des termes et d'axiomes équationnels.

Définition 1.3 *Soit un système de réécriture propositionnel $\mathcal{R}$, la proposition P se réécrit en P' dans $\mathcal{R}$ si :*
$P_{|\omega} = \sigma(l)$ et $P' = P[\sigma(r)]_\omega$, pour une règle $l \to r \in \mathcal{R}$, une certaine occurence ω dans P et une certaine substitution σ. Quand on applique σ, nous rennommons les variables liées pour éviter la capture le cas échéant.
On adoptera la notation $P \to_{\mathcal{R}} P'$.

On notera $=_{\mathcal{E}}$ et $=_{\mathcal{RE}}$ les congruences générées par $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E} \cup \mathcal{R}$.
On notera $\to_{\mathcal{R}}^*$ la fermeture transitive et réflexive de $\to_{\mathcal{R}}$.

Définition 1.4 *Soit un système de réécriture $\mathcal{RE}$, la proposition P se réécrit en P' dans $\mathcal{RE}$ si :*
$P =_{\mathcal{E}} Q$, $Q_{|\omega} = \sigma(l)$ et $P' =_{\mathcal{E}} Q[\sigma(r)]_\omega$, pour une règle $l \to r \in \mathcal{R}$, une certaine proposition Q, une certaine occurence ω dans Q et une certaine substitution σ. Quand on applique σ, nous rennommons les variables liées pour éviter la capture le cas échéant.

Nous définissons aussi certaines propriétés pour ces systèmes de réécriture.

Définition 1.5 *Soit $\mathcal{C}$ un système de réécriture. Il est dit* confluent *lorsque pour toute proposition P telle que $P \to^* P'$ et $P \to^* P''$, il existe Q telle que $P' \to^*_{\mathcal{R}} Q$ et $P'' \to^*_{\mathcal{R}} Q$.*

Proposition 1.6 *Soit un système de réécriture $\mathcal{RE}$ confluent. Si $P =_{\mathcal{RE}} P'$, alors il existe Q telle que $P \to_{\mathcal{RE}} Q$ et $P' \to_{\mathcal{RE}} Q$.*

Preuve : par récurrence sur la longueur de la dérivation.

Une plus ample introduction se trouve dans [3]. Nous sommes prêts à donner les règles d'inférence de la déduction modulo (figure 1.2). Remarquons que pour chaque système de réécriture, on a des règles d'inférence différentes.

On prouve que la déduction modulo est équivalente au calcul des séquents en montrant l'existence d'un ensemble d'axiomes $\mathcal{T}$ tels qu'on peut dériver $\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$ en déduction modulo si et seulement si on peut dériver $\mathcal{T}, \Gamma \vdash \Delta$. Pour un développement plus complet, et des preuves de cette équivalence,voir [1].

Le système que nous allons utiliser ici est un système un peu différent, bien qu'équivalent. Pour notre preuve il sera plus simple de considérer des règles de réécriture séparées des règles de déduction. Le système de déduction modulo que nous allons utiliser est donné dans la figure 1.3. Les étapes de réécriture sont pleinement séparées des étapes de déduction. Nous appellerons ce système de déduction le système R (pour réécriture).

Nous démontrons l'équivalence entre le système R et le système de déduction modulo. Dans la suite, nous noterons $\Gamma =_{\mathcal{RE}} \Gamma'$, avec Γ, Γ' des ensembles de propositions le fait qu' il existe une bijection $f \ : \ \Gamma \to \Gamma'$ telle que $A =_{\mathcal{RE}} f(A)$.

Proposition 1.7 *Soient $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta'$ des ensembles de propositions telles que $\Gamma =_{\mathcal{RE}} \Gamma'$ et $\Delta =_{\mathcal{RE}} \Delta'$.*
Si on a une démonstration du séquent $\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$ en déduction modulo, alors on a une démonstration de $\Gamma' \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'$ dans le système R.

Preuve : par récurrence sur la taille de la démonstration que nous avons à réécrire.

- Si la dernière règle n'est pas une des deux règles de réécriture, alors elle s'applique sur $A \in \Gamma$ par exemple. Soit $\Omega \vdash_{\mathcal{RE}} \Theta$ les prémisses de cette règle. Prenons l'unique $A' = f(A)$, $A' =_{\mathcal{RE}} A$.
  Alors on peut aussi appliquer cette dernière règle sur A', car nous

$$\frac{}{P \vdash_{\mathcal{RE}} Q}\text{axiom si } P =_{\mathcal{RE}} Q$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} Q, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\text{cut si } P =_{\mathcal{RE}} Q$$

$$\frac{\Gamma, Q_1, Q_2 \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\text{contr-l si } P =_{\mathcal{RE}} Q_1 =_{\mathcal{RE}} Q_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} Q_1, Q_2, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta}\text{contr-r si } P =_{\mathcal{RE}} Q_1 =_{\mathcal{RE}} Q_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\text{weak-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta}\text{weak-r}$$

$$\frac{\Gamma, P, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, R \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta} \wedge\text{-l si } R =_{\mathcal{RE}} (P \wedge Q)$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} Q, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} R, \Delta} \wedge\text{-r si } R =_{\mathcal{RE}} (P \wedge Q)$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta \quad \Gamma, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta} \vee\text{-l si } R =_{\mathcal{RE}} (P \vee Q)$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, Q, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} R, \Delta} \vee\text{-r si } R =_{\mathcal{RE}} (P \vee Q)$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta \quad \Gamma, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, R \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta} \Rightarrow\text{-l si } R =_{\mathcal{RE}} (P \Rightarrow Q)$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} Q, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} R, \Delta} \Rightarrow\text{-r si } R =_{\mathcal{RE}} (P \Rightarrow Q)$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta}{\Gamma, R \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\neg\text{-l si } R =_{\mathcal{RE}} \neg P$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} R, \Delta}\neg\text{-r si } R =_{\mathcal{RE}} \neg P$$

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\bot\text{-l si } P =_{\mathcal{RE}} \bot$$

$$\frac{\Gamma, \{t/x\}P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\forall\text{-l si } Q =_{\mathcal{RE}} \forall x P$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \{c/x\}P, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} Q, \Delta}\forall\text{-r si } c \text{ constante fraîche et si } Q =_{\mathcal{RE}} \forall x P$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\exists\text{-l si } c \text{ constante fraîche et si } Q =_{\mathcal{RE}} \exists x P$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \{t/x\}P, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} Q, \Delta}\exists\text{-r si } Q =_{\mathcal{RE}} \exists x P$$

Figure 1.2: règles d'inférence pour la déduction modulo

$$\frac{}{P \vdash_{\mathcal{RE}} P}\text{axiom}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\text{cut}$$

$$\frac{\Gamma, P, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\text{contr-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, P, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta}\text{contr-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\text{weak-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta}\text{weak-r}$$

$$\frac{\Gamma, P, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, P \wedge Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\wedge\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} Q, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P \wedge Q, \Delta}\wedge\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta \quad \Gamma, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, P \vee Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\vee\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, Q, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P \vee Q, \Delta}\vee\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta \quad \Gamma, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, P \Rightarrow Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\Rightarrow\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} Q, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P \Rightarrow Q, \Delta}\Rightarrow\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta}{\Gamma, \neg P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\neg\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \neg P, \Delta}\neg\text{-r}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\bot\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma, \{t/x\}P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, \forall x P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\forall\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \{c/x\}P, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \forall x P, \Delta}\forall\text{-r, } c \text{ constante fraîche}$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, \exists x P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\exists\text{-l, } c \text{ constante fraîche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \{t/x\}P, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \exists x P, \Delta}\exists\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\text{rewrite-l si } P =_{\mathcal{RE}} Q$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} Q, \Delta}\text{rewrite-r si } P =_{\mathcal{RE}} Q$$

Figure 1.3: règles d'inférence pour le système R

sommes en déduction modulo.
$\Gamma' \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'$ aura pour prémisses $\Omega' \vdash_{\mathcal{RE}} \Theta'$, avec :

$$\Omega =_{\mathcal{RE}} \Omega'$$
$$\Theta =_{\mathcal{RE}} \Theta'$$

Pour avoir une démonstration de ces prémisses, nous appliquons l'hypothèse de récurrence.

- Si la dernière règle est une règle de réécriture. Par exemple, une règle de réécriture à gauche :

$$\cfrac{\cfrac{\pi}{\Omega \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\ \textbf{rewrite-l}$$

  Alors, $\Gamma' =_{\mathcal{RE}} \Omega$ et $\Delta' =_{\mathcal{RE}} \Delta$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence sur $\Omega \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$, ce qui nous donne la démonstration du séquent cherché. $\diamond$

La réciproque est vraie aussi : toute démonstration en déduction modulo peut être réécrite en calcul des séquents avec règles de réécriture.

Voici un résultat plus important pour nous :

Proposition 1.8 *Soient* $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta'$ *des ensembles de propositions telles que* $\Gamma =_{\mathcal{RE}} \Gamma'$ *et* $\Delta =_{\mathcal{RE}} \Delta'$.
Si on a une démonstration sans coupures *du séquent* $\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$ *en déduction modulo, alors on a une démonstration de* $\Gamma' \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'$ sans coupures *dans le système R.*

Preuve : C'est exactement la même que la preuve précédente. La réciproque est vraie aussi, mais nous ne l'utiliserons pas.

1.1.3 Le système R'

Pour les besoins de cette démonstration nous introduisons un version un peu modifiée du système R : le système que nous allons appeler R'.

Remarquons d'abord que dans le système R nous pouvons astreindre les règles **axiom**, **weak** et **⊥-l** à ne s'appliquer qu'à des atomes. Le système obtenu reste équivalent au système R, car toute démonstration de la forme :

$$\cfrac{}{A \vdash_{\mathcal{RE}} A}\textbf{axiom}$$

est remplacée par une démonstration de ce même séquent, toute démonstration de la forme :

$$\cfrac{\pi}{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\textbf{weak}$$

est remplacée par une série de règles sur A puis des affaiblissements (à gauche ou à droite) comme suit :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\pi}{}\,\mathbf{weak} \quad \cfrac{\pi}{}\,\mathbf{weak}}{\ddots \qquad\qquad \vdots}}{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}$$

et toute démonstration de la forme :

$$\cfrac{}{\Gamma, \perp \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\perp\text{-l}$$

est remplacée par une série de **weak**, pour obtenir :

$$\cfrac{\cfrac{}{\perp \vdash}\perp\text{-l} \quad \cfrac{}{\perp \vdash A}\perp\text{-l}}{\cfrac{\ddots \qquad\qquad \vdots}{\perp \vdash_{calRE} P}}$$

Nous obtenons alors un système intermédiaire, encore équivalent au calcul des séquents, qui a des règles **axiom**, **weak** et $\perp$ un peu plus faibles, nous l'appellerons le système R_t.

Définition 1.9 *Une règle de réécriture est dite* **"vers le haut"** *lorsqu'elle est de la forme*

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, B \vdash \Delta}\textbf{rewrite-l} \quad \textit{si } B \to_{\mathcal{RE}} A$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash B, \Delta}\textbf{rewrite-r} \quad \textit{si } B \to_{\mathcal{RE}} A$$

On dira qu'une preuve est "vers le haut" lorsque toutes ses règles de réécriture seront "vers le haut".

Nous allons restreindre le système R_t de manière à ce que toutes les preuves dans ce système soient "vers le haut", en restreignant simplement les deux règles **rewrite**. Le système R' est donné dans la figure 1.4.

Proposition 1.10 *Soient* Γ, Δ *des ensembles de propositions. Toute démonstration de* $\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$ *dans le système* R' *peut-être réécrite dans le système* R.

Preuve : par récurrence sur la taille de la démonstration.

Proposition 1.11 *Soient* Γ, Δ *des ensembles de propositions. Toute démonstration sans coupures de* $\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$ *dans le système* R' *peut-être réécrite sans coupures dans le système* R.

Preuve : par récurrence sur la taille de la démonstration.

La réciproque est fausse, par exemple, si nous avons la seule règle de réécriture $A \to_{\mathcal{R}} C, A \to_{\mathcal{R}} B$, alors il n'est pas possible de démontrer le

$$\frac{}{P \vdash_{\mathcal{RE}} P}\text{axiom},\quad P \text{ atomique}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\text{cut}$$

$$\frac{\Gamma, P, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\text{contr-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, P, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta}\text{contr-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\text{weak-l},\quad P \text{ atomique}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta}\text{weak-r},\quad P \text{ atomique}$$

$$\frac{\Gamma, P, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, P \wedge Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta} \wedge\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} Q, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P \wedge Q, \Delta} \wedge\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta \quad \Gamma, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, P \vee Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta} \vee\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, Q, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P \vee Q, \Delta} \vee\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta \quad \Gamma, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, P \Rightarrow Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta} \Rightarrow\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} Q, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P \Rightarrow Q, \Delta} \Rightarrow\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta}{\Gamma, \neg P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\neg\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \neg P, \Delta}\neg\text{-r}$$

$$\frac{}{\bot \vdash_{\mathcal{RE}} P}\bot\text{-l},\quad P \text{ atomique}$$

$$\frac{\Gamma, \{t/x\}P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, \forall x P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\forall\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \{c/x\}P, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \forall x P, \Delta}\forall\text{-r},\ c \text{ constante fraîche}$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, \exists x P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\exists\text{-l},\ c \text{ constante fraîche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \{t/x\}P, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \exists x P, \Delta}\exists\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}{\Gamma, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\text{rewrite-l si } Q \to_{\mathcal{RE}} P$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P, \Delta}{\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} Q, \Delta}\text{rewrite-r si } Q \to_{\mathcal{RE}} P$$

Figure 1.4: règles de déduction du système R'

séquent $B \vdash_{\mathcal{RE}} C$ dans le système R', tandis que nous pouvons le faire dans le système R :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{axiom}
\UnaryInfC{$A \vdash_{\mathcal{RE}} A$}
\RightLabel{rewrite-r}
\UnaryInfC{$A \vdash_{\mathcal{RE}} C$}
\RightLabel{rewrite-l}
\UnaryInfC{$B \vdash_{\mathcal{RE}} C$}
\end{prooftree}
$$

Le système R' est plus faible que le système R, et donc que la déduction modulo. Mais il nous suffira pour prouver le théorème. Il est important de noter que les preuves sans coupures de R' se réécrivent en preuves sans coupures dans la déduction modulo.

Remarquons que nous ne supposerons rien sur le système de règles de réécriture. En particulier, nous n'aurons pas besoin de la confluence de celui-ci. Cela vient du fait suivant :
Si un système de réécriture est confluent, alors toute preuve en déduction modulo peut être transformée en preuve dans le système R'. Car ayant la confluence, si $P \equiv_{\mathcal{RE}} Q$ alors il existe Z tel que $P \to_{\mathcal{RE}} Z$ et $Q \to_{\mathcal{RE}} Z$, d'après la proposition 1.6. Tout système de réécriture confluent est donc implicitement vers le haut.

1.1.4 Élimination des coupures en déduction modulo

Le problème principal de la déduction modulo est que l'on perd la notion d'élimination des coupures. En effet, considérons le système de règles de réécriture suivant :

$$A \to B \wedge \neg A$$

C'est un système confluent qui n'a pas la propriété d'élimination des coupures. Voici un contre-exemple :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{axiom}
\UnaryInfC{$B, A, B \vdash_{\mathcal{RE}} A$}
\RightLabel{$\neg$}
\UnaryInfC{$B, A, B, \neg A \vdash_{\mathcal{RE}}$}
\RightLabel{$\wedge$}
\UnaryInfC{$B, A, A \vdash_{\mathcal{RE}}$}
\RightLabel{contr}
\UnaryInfC{$B, A \vdash_{\mathcal{RE}}$}
\AxiomC{}
\RightLabel{axiom}
\UnaryInfC{$A \vdash_{\mathcal{RE}} A$}
\RightLabel{weak}
\UnaryInfC{$B, A, B \vdash_{\mathcal{RE}} A$}
\RightLabel{$\neg$}
\UnaryInfC{$B, A, B, \neg A \vdash_{\mathcal{RE}}$}
\RightLabel{$\wedge$}
\UnaryInfC{$B, A, A \vdash_{\mathcal{RE}}$}
\RightLabel{contr}
\UnaryInfC{$B, A \vdash_{\mathcal{RE}}$}
\RightLabel{$\neg$}
\UnaryInfC{$B \vdash_{\mathcal{RE}} \neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{axiom}
\UnaryInfC{$B \vdash_{\mathcal{RE}} B$}
\RightLabel{$\wedge$}
\BinaryInfC{$B \vdash_{\mathcal{RE}} A$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$B \vdash_{\mathcal{RE}}$}
\RightLabel{$\neg$-r}
\UnaryInfC{$\vdash_{\mathcal{RE}} \neg B$}
\end{prooftree}
$$

On a donc une preuve de $\vdash_{\mathcal{RE}} \neg B$, mais il n'existe pas de preuve de ce séquent sans coupures. Ce contre-exemple prouve aussi que le système R' ne possède pas la propriété d'élimination des coupures, car cette démonstration peut être réécrite dans le système R' (ce que nous ne ferons pas ici).

Ainsi, nous devrons, pour chaque système de réécriture prouver qu'il a la propriété d'élimination des coupures (ou prouver qu'il ne l'a pas). Certains résultats ont déjà été obtenus (voir par exemple [3]).

De plus, le second théorème de Gödel affirme qu'on ne peut pas prouver la cohérence d'une théorie dans cette même théorie. Et le théorème d'élimination des coupures est directement lié à la cohérence de la théorie. On peut donc en conclure qu'il est difficile de prouver ce théorème.

1.2 le système ENAR

Le système ENAR (Extented Narrowing And Resolution) a été introduit par Dowek, Hardin et Kirchner pour la logique d'ordre supérieur (HOL). Les règles de déduction en ENAR s'appliquent sur un ensemble d'ensemble de propositions atomiques ou leur négation, que l'on appelle une forme clausale. Il existe des règles permettant d'écrire une proposition quelconque du calcul des séquents dans sa forme clausale.

Les règles de déduction de ENAR sont une extension appliquée aux règles de réécriture des règles de déduction de la résolution classique sur les formes clausales.

1.2.1 Les formes clausales

Définition 1.12 *Soit P une proposition et l une liste des variables libres de P, appelée son label.*
Une proposition labelée est une paire P^l.

Définition 1.13 *Soit θ une substitution. Quand on applique θ à une proposition labellée, on remplace dans le label chaque variable x par la liste des variables libres de θx.*
un proposition labelée P^l est $\mathcal{E}$-équivalente à une proposition labelée $Q^{l'}$ si $P =_{\mathcal{E}} Q$ et $l = l'$.

Définition 1.14 (Clause) *Une clause est un ensemble de propositions labelées telles que chacune de ces propositions soit un littéral, c'est à dire un atome, ou bien sa négation.*
On note la clause vide $\square$.

Donnons les règles qui permettent de calculer la forme clausale d'une proposition. La forme clausale est un ensemble de clauses. Avec les règles de la figure 1.5, nous pouvons calculer la forme clausale de n'importe quelle proposition. Ces règles s'appliquent sur des ensembles d'ensembles de propositions. Nous noterons $cl(P_1, ..., P_n)$ le résultat de la mise en forme clausale de $\{\{P_1\}, ..., \{P_n\}\}$.

Définition 1.15 *Soit $\psi = \{P_1, ..., P_n\}$ un ensemble de propositions. On note $\overline{\psi} = P_1 \vee (P_2 \vee ... \vee P_n)...)$*

$\Phi, (\psi, (P \wedge Q)^l) \longrightarrow \Phi, (\psi, P^l), (\psi, Q^l)$
$\Phi, (\psi, (P \vee Q)^l) \longrightarrow \Phi, (\psi, P^l, Q^l)$
$\Phi, (\psi, (P \Rightarrow Q)^l) \longrightarrow \Phi, (\psi, (\neg P)^l, Q^l)$
$\Phi, (\psi, \bot^l) \longrightarrow \Phi, \psi$
$\Phi, (\psi, (\forall x P)^{y_1,...,y_n}) \longrightarrow \Phi, (\psi, P^{y_1,...,y_n,x}), x$ variable fraîche
$\Phi, (\psi, (\exists x P)^{y_1,...,y_n}) \longrightarrow \Phi, (\psi, (\{f(y_1, ..., y_n)/x\}P)^{y_1,...,y_n}, f,$ symbole de fonction frais
$\Phi, (\psi, (\neg(P \vee Q))^l) \longrightarrow \Phi, (\psi, (\neg P)^l), (\psi, (\neg Q)^l)$
$\Phi, (\psi, (\neg(P \wedge Q))^l) \longrightarrow \Phi, (\psi, (\neg P)^l, (\neg Q)^l)$
$\Phi, (\psi, (\neg(P \Rightarrow Q))^l) \longrightarrow \Phi, (\psi, P^l, (\neg Q)^l)$
$\Phi, (\psi, (\neg\bot)^l) \longrightarrow \Phi$
$\Phi, (\psi, (\neg\exists x P)^{y_1,...,y_n}) \longrightarrow \Phi, (\psi, (\neg P)^{y_1,...,y_n,x}), x$ variable fraîche
$\Phi, (\psi, (\neg\forall x P)^{y_1,...,y_n}) \longrightarrow \Phi, (\psi, (\neg\{f(y_1, ..., y_n)/x\}P)^{y_1,...,y_n}, f$ symbole de fonction frais
$\Phi, (\psi, (\neg\neg P)^l) \longrightarrow \Phi, (\psi, P^l)$

Figure 1.5: règles de la mise en forme clausale

Définition 1.16 *Soit $\psi = \{P_1^{l_1}, ..., P_n^{l_n}\}$ un ensemble de propositions labelées. On définit $\overline{\forall}\psi$ par induction :*

- *Si ψ est vide, alors $\overline{\forall}\psi = \bot$*
- *Soit $l_p = l'_p :: x$ le premier label non vide, alors $\overline{\forall}\psi = \forall x \overline{\forall}\{P_1, ..., P_{p-1}, P_p^{l'_p}, ..., P_n^{l_n}\}$ si x n'appartient pas à $l'_p, ..., l_n$, et $\overline{\forall}\{P_1, ..., P_{p-1}, P_p^{l_{p'}}, ..., P_n^{l_n}\}$ sinon.*
- *$\overline{\forall}\psi = \overline{\psi}$ si tous les labels sont vides.*

1.2.2 Les règles d'inférence ENAR

Définition 1.17 *Soit un système d'équations $\mathcal{E}$. Une équation modulo $\mathcal{E}$ est une paire de termes ou de propositions atomiques $t =^?_{\mathcal{E}} t'$.*
Une clause avec contraintes $U[\mathcal{C}]$ est une clause U et un ensemble d'équations $\mathcal{C}$, que l'on appelle contraintes.

Les règles de déduction sont données dans la figure 1.6.

1.2.3 Correction et complétude de ENAR

Dowek, Hardin et Kirchner ont prouvé que si un système de règles de réécritures possédait la propriété d'élimination des coupures, alors ENAR

Extended Resolution

$$\frac{\{P_1,...,P_n,Q_1,...,Q_m\}[\mathcal{C}_1] \quad \{R_1,...,R_p,S_1,...,S_q\}[\mathcal{C}_2]}{\{Q_1,...,Q_m,S_1,...,S_q\}[\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \{P_1 =^?_{\mathcal{E}} ... =^?_{\mathcal{E}} P_n =^?_{\mathcal{E}} R_1 =^?_{\mathcal{E}} ... =^?_{\mathcal{E}} R_p\}]}$$

Extended Narrowing

$$\frac{U[\mathcal{C}]}{U'[\mathcal{C} \cup \{U_{\|\omega} =^?_{\mathcal{E}} l\}]}$$ si $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$, $U_{\|\omega}$ proposition atomique, et $U' \in cl(\{U[r]_\omega\})$

Figure 1.6: règles d'inférence de ENAR

était correct et complet, c'est à dire qu'on a une démonstration de :

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

si et seulement si on a une dérivation de :

$$cl(\Gamma, \neg\Delta) \hookrightarrow \Box[\mathcal{C}]$$

avec $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes $\mathcal{E}$-unifiable.

Plus précisément, ils ont prouvé que si on avait une preuve sans coupures de :

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

alors on pouvait trouver une dérivation dans ENAR de :

$$cl(\Gamma, \neg\Delta) \hookrightarrow \Box[\mathcal{C}]$$

avec $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes $\mathcal{E}$-unifiable.
Et inversement, si on a une dérivation dans ENAR de la forme précédente, alors on a une preuve de :

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

qui peut éventuellement comporter des coupures (mais grâce à la propriété d'élimination des coupures, nous pouvons trouver une démonstration de ce séquent sans coupures).

1.2.4 ENAR et le théorème d'élimination des coupures

Dans ENAR, on ne peut pas trouver de dérivation de

$$\emptyset \hookrightarrow \Box$$

Ce qui revient à dire que pour un certain système de règles de réécriture, si on a le théorème de cormplétude de ENAR vis à vis de la déduction modulo, alors on ne peut pas trouver de démonstration de :

$$\vdash_{\mathcal{RE}}$$

Donc, la déduction modulo est cohérente.

Malheureusement, dans la preuve de complétude de ENAR, on utilise fortement l'hypothèse que le système de réécriture posséde la propriété d'élimination des coupures. Qui plus est, dans la preuve de correction, on transforme une dérivation dans ENAR en une démonstration en calcul des séquents qui en général comporte un grand nombre de coupures.

Mais récemment, Stuber [2] a prouvé le théorème de complétude de ENAR sans utiliser cette hypothèse, pour certains systèmes de réécriture. Il a prouvé la cohérence de ces systèmes. Tous les systèmes cohérents ne disposent pas de la propriété d'élimination des coupures. Ce que nous voulons démontrer est que tous les systèmes pour lesquels ENAR est complet possèdent cette propriété d'élimination des coupures :
Si on a une dérivation de :

$$cl(\Gamma, \neg\Delta) \hookrightarrow \Box$$

alors on a une preuve sans coupures de :

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

1.2.5 Le système EIR

Le système EIR (Extended Identical Resolution) a été introduit dans la démonstration de la complétude et de la correction du système de déduction ENAR dans [1].
C'est un système intermédiaire et complètement équivalent à ENAR. Il s'applique lui aussi sur des ensembles de clauses, comme ENAR.

Nous travaillerons sur le système EIR, car si nous arrivons à prouver que toute dérivation dans EIR se réécrit en preuves sans coupures en déduction modulo, alors on n'aura plus qu'à étendre le résultat à ENAR.

EIR a les règles d'inférence données dans la figure 1.7.

$\dfrac{U}{\{x \mapsto t\}U}$	**Instantiation**
$\dfrac{U}{U'}$	**Conversion** si $U =_{\mathcal{E}} U'$
$\dfrac{U, P^{l_1} \quad U', \neg P^{l_2}}{U \cup U'}$	**Identical Resolution**
$\dfrac{U}{U'}$	**Reduction** si $U \to_{\mathcal{R}} \psi$ et $U' \in cl(\psi)$

Figure 1.7: Règles d'inférence de EIR

Définition 1.18 *Soit un système de règles de réécriture $\mathcal{RE}$ et un ensemble de clauses $\mathcal{K}$. nous écrirons :*

$$\mathcal{K} \hookrightarrow_{\mathcal{RE}} U$$

si la clause U peut être déduite des clauses de $\mathcal{K}$ en utilisant un nombre fini de fois les règles d'inférence de EIR.
C'est à dire, il existe $U_1, ...U_n$ telles que si $n = 0$, $U \in \mathcal{K}$, et si $n \geq 1$, pour tout $p \in [1..n]$, U_p est déduit de$\mathcal{K}, U_1, ..., U_{p-1}$ par l'application d'une des règles d'inférence de EIR.

Remarques sur les règles d'inférence de EIR :

- Pour la règle **Instantiation**, on remplace dans les labels la variable instanciée par les variables libres du terme substitué.

- En ce qui concerne la règle **Conversion** , les labels restent inchangés, grâce à la condition imposée sur les équations de $\mathcal{E}$.
- Pour la règle **Reduction**, les labels sont modifiés par la mise en forme clausale.
- Pour la règle **Identical Resolution**, on peut éliminer deux propositions n'ayant pas le même label.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.19 *Soient Γ, Δ des ensembles de propositions. Si dans EIR :*

$$cl(\Gamma, \neg\Delta) \hookrightarrow \Box$$

alors on a une dérivation sans coupures de :

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

dans le système R'.

Dans la démonstration de ce théorème, il apparît crucial que les démonstrations soient "vers le haut", ce qui peut se comprendre intuitivement par le fait que les dérivations de EIR sont elles aussi "vers le haut" (règle **Reduction**).
Nous prouverons ce théorème en rajoutant un axiome, l'axiome de Skolem 2.3. Nous conjecturons que cet axiome est démontrable. Il est déjà démontré si on retire la condition "sans coupures".

Comme chaque démonstration sans coupures dans R' peut se réécrire sans coupures en déduction modulo (voir les propositions 1.8 et 1.11), et que ENAR est équivalent à EIR, nous pourrons affirmer que si on a une dérivation dans ENAR de $cl(\Gamma, \neg\Delta) \hookrightarrow \Box$, alors on a une preuve sans coupures en déduction modulo de $\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$.

Chapter 2

Preuve de la correction

Dans toute cetta partie, nous nous placerons dans le système R'. La taille se réfère à la profondeur de l'arbre de démonstration.

2.1 Résultats préliminaires

Tous ces résultats sont très importants dans notre cas, t ont été ignorés dans les démonstrations précédentes à celles-ci, car elles vont de soi *dès qu'on s'autorise à utiliser la règle de coupure.* Comme notre but est justement d'éliminer cette règle, nous devons prouver ces résultats.

2.1.1 Le lemme de Kleene

Lemme 2.1 (lemme de Kleene) *S'il existe une dérivation de*

$$\Gamma, A \vee B \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

sans coupures, alors on peut construire une dérivation de

$$\Gamma, A \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$
$$\Gamma, B \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

sans coupures, de taille strictement inférieure.

Preuve : par récurrence sur la taille de la dérivation.

- Si la première règle appliquée est une règle qui s'applique sur une proposition de Γ ou de Δ, alors soit $\Gamma', A \vee B \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'$ la prémisse de cette règle (il y en a éventuellement deux). Nous utilisons l'hypothèse de récurrence pour avoir deux dérivations de $\Gamma', A \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'$ et de $\Gamma', B \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'$. Puis nous appliquons la même règle sur chacune des deux dérivations respectivement. Par exemple, à partir de :

$$\cfrac{\cfrac{\pi}{A \vee B, \{t/x\}P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}}{A \vee B, \forall x P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\forall - \mathrm{l}$$

par hypothèse de récurrence, on aura :

$$\frac{\pi}{A, \{t/x\}P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}$$

Nous rajoutons la règle ∀-l et obtenons :

$$\dfrac{\dfrac{\pi}{A, \{t/x\}P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}}{A, \forall x P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}$$

- Si la première règle appliquée est une règle de réécriture sur $A \vee B$. Alors *puisque nous sommes dans le système* R', on a :

$$A \vee B \rightarrow_{\mathcal{RE}} A' \vee B'$$

avec $A \rightarrow_{\mathcal{RE}} A'$ et $B \rightarrow_{\mathcal{RE}} B'$.
Nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence sur la dérivation de $\Gamma, A' \vee B' \vdash \Delta$, et nous obtenons deux dérivations de :

$$\Gamma, A' \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$
$$\Gamma, B' \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

de taille inférieure ou égale à celle de la démonstration de $\Gamma, A' \vee B' \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$. En rajoutant une règle de réécriture à chacune des dérivations, nous avons les dérivations cherchées, qui restent de longueur inférieure ou égale.

- Si la première règle appliquée est une règle de contraction sur $A \vee B$, alors nous appliquons deux fois l'hypothèse de récurrence. La première fois, nous obtenons des démonstrations de longueur inférieure ou égale à celle de $\Gamma, A \vee B, A \vee B \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$ de :

$$\Gamma, A, A \vee B \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$
$$\Gamma, B, A \vee B \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

Auxquelles nous appliquons encore une fois l'hypothèse de récurrence, grâce au fait que ces démonstrations sont de taille inférieure ou égale à celle de $\Gamma, A \vee B, A \vee B \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$, elle même strictement inférieure à celle de $\Gamma, A \vee B \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$. Nous obtenons quatre démonstrations, nous n'en conservons que les deux qui nous intéressent :

$$\Gamma, A, A \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$
$$\Gamma, B, B \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

et nous leur appliquons la règle de contraction. La propriété d'être de taille inférieure ou égale à la démonstration de départ de $\Gamma, A \vee B, A \vee B \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$ est encore vérifiée.

- Si la première règle appliquée est un $\vee$-gauche sur $A \vee B$, nous avons trouvé ce que nous cherchions. $\diamond$

Corollaire 2.2 *Si on a une démonstration sans coupures du séquent :*

$$\Gamma, P_1 \vee (... \vee P_n)...) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

alors pour toute permutation σ de $[1..n]$ on a une démonstration sans coupures de :

$$\Gamma, P_{\sigma(1)} \vee (... \vee P_{\sigma(n)})...) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

Preuve : par récurrence sur le nombre n de propositions. Le cas initial $n = 2$ vient du lemme de Kleene.

Soient $m = \sigma(1)$ et $l = \sigma^{-1}(1)$. On applique le lemme **2.1** et on obtient deux démonstrations de :

$$\Gamma, P_1 \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$
$$\Gamma, P_2 \vee (... \vee P_n)...) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

Par hypothèse de récurrence la deuxième démonstration est équivalente à :

$$\Gamma, P_{\sigma(1)} \;\vee\; (...(P_{\sigma(l-1)} \vee (P_{\sigma(l+1)} \vee (... \vee P_{\sigma(n)})...) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

On applique encore une fois le lemme 2.1, et on obtient trois démonstrations, sans coupures de :

$$\Gamma, P_1 \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$
$$\Gamma, P_{\sigma(1)} \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$
$$\Gamma, P_{\sigma(2)} \vee (...(P_{\sigma(l-1)} \vee (P_{\sigma(l+1)} \vee (... \vee P_{\sigma(n)})...) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

On recombine la première et la troisième démonstration, on réutilise encore une fois l'hypothèse de récurrence et on obtient deux démonstrations de :

$$\Gamma, P_{\sigma(1)} \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$
$$\Gamma, P_{\sigma(2)} \vee (...(P_{\sigma(l-1)} \vee (P_{\sigma(l)} \vee (P_{\sigma(l+1)} \vee (... \vee P_{\sigma(n)})...) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

Et enfin, on combine ces deux démonstrations et on obtient ce que l'on cherchait. Notons que la taille de la démonstration peut s'en trouver allongée. $\diamond$

Grâce à ce corollaire, nous pourrons travailler dans toute la suite de cette partie sans se soucier du parenthésage en ce qui concerne le signe $\vee$ à gauche. On pourra travailler de cette manière tant que l'on aura pas à tenir compte de la longueur de l'arbre de démonstration (ce qui pourrait arriver lors de certaines récurrences).

2.1.2 L'axiome de Skolem

Axiome 2.3 (Skolem) *Il existe une démonstration sans coupures de :*

$$\Gamma, \forall x_1 ... \forall x_n \exists y P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

si et seulement si il existe une démonstration sans coupures de :

$$\Gamma, \forall x_1 ... \forall x_n \{f(x_1, ..., x_n)/y\} P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

f symbole de fonction frais.

On garde ce résultat comme axiome pour le moment, mais il faudra trouver une démonstration de celui-ci, dans le système R'.

2.1.3 Les quantificateurs

Nous démontrons des résultats qui seront utiles lorsque nous manipulerons des quantificateurs. De même, nous n'aurions pas besoin de démontrer ces résultats si nous nous autorisions à utiliser la règle de coupure.

Définition 2.4 *Nous appellerons une démonstration vérifiant la propriété suivante une démonstration avec des règles $\forall$-l regroupées :*
Si on rencontre une règle $\forall$-l sur $\forall x P$, alors la règle suivante dans la démonstration sera une règle sur P qui n'est pas la contraction.

Exemples : La démonstration suivante a ses règles $\forall$-gauche regroupées.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{P(x_1, y_1) \vdash_{\mathcal{RE}} P(x_1, y_1)}\textbf{axiom}}{\forall x P(x, y_1) \vdash_{\mathcal{RE}} P(x_1, y_1)}\forall - \mathbf{l}}{\forall y \forall x P(x, y) \vdash_{\mathcal{RE}} P(x_1, y_1)}\forall - \mathbf{l}}{\forall y \forall x P(x, y) \vdash_{\mathcal{RE}} \forall x P(x, y_1)}\forall - \mathbf{r}}{\forall y \forall x P(x, y) \vdash_{\mathcal{RE}} \forall y \forall x P(x, y)}\forall - \mathbf{r}$$

Mais la démonstration suivante n'a pas ses règles $\forall$-gauche regroupées :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{P(x_1, y_1) \vdash_{\mathcal{RE}} P(x_1, y_1)}\textbf{axiom}}{\forall x P(x, y_1) \vdash_{\mathcal{RE}} P(x_1, y_1)}\forall - \mathbf{l}}{\forall x P(x, y_1) \vdash_{\mathcal{RE}} \forall x P(x, y_1)}\forall - \mathbf{r}}{\forall y \forall x P(x, y) \vdash_{\mathcal{RE}} \forall x P(x, y_1)}\forall - \mathbf{l}}{\forall y \forall x P(x, y) \vdash_{\mathcal{RE}} \forall y \forall x P(x, y)}\forall - \mathbf{r}$$

en revanche, celle-ci les a :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\pi}{\Gamma, P(x_1, y_1, z_1) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}}{\Gamma, \forall z P(x_1, y_1, z) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}}{\Gamma, \exists y \forall z P(x_1, y, z) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}}{\Gamma, \forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}$$

Lemme 2.5 *Si on a une démonstration sans coupures, avec les règles $\forall$-gauche regroupées de :*

$$\Gamma, \{t_1/x_1\}P_1, \ ..., \ \{t_n/x_n\}P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

alors on peut construire une démonstration sans coupures avec les règles $\forall$-gauche regroupées de :

$$\Gamma, \forall x_1 P_1, \ ..., \ \forall x_n P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

dans laquelle la première règle est :

- *soit la même que dans la démonstration de départ*
- *soit $\forall$-l sur une des propositions considérées, suivi de la même règle que dans la démonstration de départ.*

On fait cette preuve par récurrence sur la taille de la démonstration : On considère la première règle appliquée. Si c'est une règle sur Γ ou Δ alors, soit $\Gamma', \{t_1/x_1\}P_1, ..., \{t_n/x_n\}P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'$ la (les) prémisse(s). Par hypothèse de récurrence on a une démonstration de $\Gamma', \forall x_1 P_1, \ ..., \ \forall x_n P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'$. On peut encore appliquer cette même règle, car la condition de fraîcheur des variables n'est pas violée. Par exemple, si on a :

$$\cfrac{\cfrac{\pi}{\{t'/y\}A \ , \ \{t/x\}P, \Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}}{\exists y A, \{t/x\}P, \Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}$$

avec t' frais dans le séquent considéré, alors on a :

$$\cfrac{\cfrac{\pi'}{\{t'/y\}A \ , \ \forall x P, \Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}}{\exists y A, \forall x P, \Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}$$

et le condition de fraîcheur des variables n'est pas violée, car t' est toujours une variable fraîche.

Si c'est une règle sur P_1 alors :

- C'est un **axiom** ou **weak** - nous concluons en appliquant l'hypothèse de récurrence, puis en rajoutant la même règle, et enfin, en rajoutant la règle du quantificateur universel gauche. Exemple pour la règle **axiom** :

  $$\cfrac{}{P_1(t_1) \vdash_{\mathcal{RE}} P_1(t_1)}\textbf{axiom}$$

  se transforme en :

  $$\cfrac{\cfrac{}{P_1(t_1) \vdash_{\mathcal{RE}} P_1(t_1)}\textbf{axiom}}{\forall x_1 P_1(x_1) \vdash_{\mathcal{RE}} P_1(t_1)}\forall - \mathbf{l}$$

- C'est une **contraction** sur P_1 - nous appliquons l'hypothèse de récurrence, puis nous contractons sur $\forall x_1 P_1$.

- C'est un $\forall$**-gauche** sur P_1- nous appliquons l'hypothèse de récurrence et nous obtenons une preuve de :

$$\Gamma, \{t_1/x_1\}\{t'/y\}P'_1,\ \forall x_2 P_2,\ ...,\ \forall x_n P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta \tag{2.1}$$

  qui a ses règles $\forall$-l regroupées, et dont la première règle est une règle sur P'_1. En effet, dans la prémisse :

$$\Gamma, \{t_1/x_1\}\{t'/y\}P'_1,\ \{t_2/x_2\}P_2,\ ...,\ \{t_n/x_n\}P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

  la première règle est sur P'_1, puisque les règles $\forall$-l sont regroupées. dans la démonstration de départ.

  D'après l'hypothèse de récurrence, si on a une règle $\forall$-l sur P_2 par exemple, on violerait le fait que les règles $\forall$-l soient regroupées. (car la règle suivante serait celle sur P'_1 - voir l'énoncé du lemme).
  Donc dans 2.1 la première règle est une règle sur P'_1 qui n'est pas la contraction. Nous rajoutons $\forall$-gauche sur y puis sur x_1 et nous conservons les propriétés voulue.

- C'est une autre règle sur P_1, on applique l'hypothèse de récurrence de façon à avoir une démonstration de :

$$\Gamma, \{t_1/x_1\}P'_1,\ \forall x_2 P_2,\ ...,\ \forall x_n P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

  qui sont la (les) prémisse(s) de la règle. Puis nous appliquons la même règle, et enfin, nous rajoutons $\forall$-gauche sur x_1. $\diamond$

Lemme 2.6 *Si on a une démonstration sans coupures de :*

$$\Gamma\ \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

alors on peut construire une démonstration sans coupures du même séquent dans laquelle toutes les règles $\forall$-l sont regroupées.

Preuve : par récurrence sur la taille de la démonstration.

- Si la première règle n'est pas $\forall$-gauche sur la proposition considérée alors on applique l'hypothèse de récurrence sur les prémisses.

- Si la première règle es $\forall$-gauche sur P, alors on applique l'hypothèse de récurrence, pour obtenir une démonstration sans coupures de :

$$\{t/x\}P, \Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

  où toutes les règles $\forall$-gauche seront regroupées.

On démontre un résultat intermédiaire qui nous permettra de conclure dans la démonstration de ce lemme 2.6.

Grâce au lemme 2.5, à partir de la preuve de $\Gamma, \{t/x\}P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$ obtenue par hypothèse de récurrence, nous pouvons construire une preuve sans coupures de :

$$\Gamma, \forall x P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

qui a toutes ses règles $\forall$-gauche regroupées. $\diamond$

Proposition 2.7 *Soient $\sigma_1, ..., \sigma_m$ des permutations de $[1..n_1]$, ..., $[1..n_m]$. Si on a une démonstration sans coupures de :*

$$\Gamma,\ \forall x_{1,1}...\forall x_{1,n_1}\ P_1,\ ...,\ \forall x_{m,1}...\forall x_{m,n_m}\ P_m\ \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

alors on a une démonstration sans coupures de :

$$\Gamma,\ \forall x_{1,\sigma_1(1)}...\forall x_{1,\sigma_1(n_1)}\ P_1,\ ...,\ \forall x_{m,\sigma_m(1)}...\forall x_{m,\sigma_m(n_m)}\ P_m\ \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

Preuve :

1. On applique le lemme 2.6 pour avoir une démonstration où toutes les règles $\forall$-gauche sont regroupées. Notons que toutes les règles $\forall$-gauche sont présentes grâce à la condition que les règles weak, axiom et $\perp$ s'appliquent à des propositions atomiques seulement (car nous sommes dans le système R'). Autrement dit, à un moment ou à un autre dans la démonstration, on aura ce schéma là :

$$\frac{\pi}{\Gamma, \forall x P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\forall\text{-gauche}$$

   On le prouve par élimination sur le type de règle pouvant s'appliquer.

2. On construit par récurrence sur la taille de cette démonstration la nouvelle démonstration :

   - Si la règle n'est pas un $\forall$-gauche sur $P_1, ..., P_m$, on applique l'hypothèse de récurrence, et on obtient π' (éventuellement π'') des démonstrations auxquelles on peut appliquer cette même règle pour construire π.
   - Si la règle est un $\forall$-gauche sur P_1 alors on est certain que tous les autres $\forall$-gauche sur P_1 se trouveront juste au dessus dans la démonstration, de la manière suivante :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\theta}{\Gamma, P_1 \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\ \forall-\textbf{gauche}}{\vdots}}{\Gamma,\ \forall x_{1,1}...\forall x_{1,n_1}\ P_1\ \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\ \forall-\textbf{gauche}$$

     Nous appliquons l'hypothèse de récurrence sur θ et de rajouter sur la preuve obtenue de $\Gamma, P_1 \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$ les règles $\forall$-gauche, mais dans l'ordre qui nous convient.

$\diamond$

Nous prouvons un lemme de Kleene sur les quantificateurs existentiels.

Lemme 2.8 *Soit une démonstration sans coupures de :*

$$\Gamma,\ \exists x_1 P_1,\ ...,\ \exists x_n P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

alors il existe une démonstration sans coupures et de

$$\Gamma, \{t_1/x_1\}P_1,\ ..., \{t_n/x_n\}P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

de taille inférieure de n au moins, où les variables liées par $\exists$ ont été substituées.

Preuve : Par récurrence sur la taille de la démonstration, car on ne viole pas la condition de fraîcheur des variables. Et à un renommage de variables près on garde les mêmes propositions. Exemple pour la règle $\vee$**-gauche** :
Par hypothèse de récurrence on obtient des démonstrations θ et θ' des séquents :

$$\Gamma, A, \{y_1/x_1\}P_1, ..., \{y_n/x_n\}P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$
$$\Gamma, B, \{y'_1/x_1\}P_1, ..., \{y'_n/x_n\}P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

de taille inférieure de n au moins.
On effectue les substitution suivantes :

- $\{z_1/x_1\}, ..., \{z_n/x_n\}$ dans θ
- $\{z_1/x'_1\}, ..., \{z_n/x'_n\}$ dans θ'

en ayant choisi $z_1, ..., z_n$ des variables fraîches dans les deux démonstrations θ, θ'. Puis on applique la règle $\vee$-gauche.

Donnons encore une exemple pour la règle contraction sur $\exists x_1 P_1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient une démonstration sans coupures de :

$$\Gamma, \{y_1/x_1\}P_1, \{y'_1/x_1\}P_1, ..., \{y_n/x_n\}P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

de taille inférieure de $n+1$ au moins. On substitue dans cette démonstration z à toutes les variables y_1 et y'_1, puis on rajoute la règle de contraction.$\diamond$

La taille inférieure de n au moins est obtenue grâce au fait que nous n'autorisons que les axiomes et les affaiblissement sur des propositions atomiques, et au fait que lorsque nous recontrons une contraction, on fait diminuer la taille de $n+1$.

Proposition 2.9 *Une démonstration sans coupures de la forme suivante :*

$$\Gamma, (\exists x P) \vee Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

x non libre dans Q
existe si et seulement si il existe une démonstration sans coupures de :

$$\Gamma, \exists x(P \vee Q) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

Preuve : On construit une preuve à partir de l'autre en appliquant les deux lemmes de Kleene 2.1 et 2.8.
Dans un sens, à partir de :

$$\Gamma, (\exists x P) \vee Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

on applique d'abord le lemme 2.1 et on obtient deux démonstrations sans coupures de :

$$\Gamma, (\exists x P) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$
$$\Gamma, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

puis sur la première démonstration, on applique le lemme 2.8 et on obtient une preuve de :

$$\Gamma, (\{y/x\}P) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

avec y variable fraîche. On remplace y par z dans toute cette démonstration, z étant une variable entièrement fraîche dans toutes les démonstrations considérées. alors on peut appliquer la règle du $\vee$-gauche sur

$$\Gamma, (\{z/x\}P) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

$$\Gamma, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

puis la règle $\exists$-gauche pour obtenir la démonstration désirée.

Pour le sens inverse, on applique dans l'autre sens les lemmes. $\diamond$
On veut prouver un résultat similaire, mais avec des quantificateurs universels, ce qui est plus difficile.

Proposition 2.10 *Une démonstration sans coupures de la forme suivante existe :*

$$\begin{array}{ll} \Gamma, & \forall x_{1,1} \ ... \ \forall x_{1,n_1} \ \forall y_{1,1} \ ... \ \forall y_{1,m_1} \ (P_1 \vee Q_1), \ ... \\ & \forall x_{p,1} \ ... \ \forall x_{p,n_p} \ \forall y_{p,1} \ ... \ \forall y_{p,m_p} \ (P_p \vee Q_p) \ \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta \end{array}$$

avec $y_{r,1}, ..., y_{r,m_r}$ n'apparaissant pas libres dans P_r si et seulement si il existe une démonstration sans coupures de :

$$\begin{array}{ll} \Gamma, & \forall x_{1,1} \ ... \ \forall x_{1,n_1}(P_1 \vee \forall y_{1,1} \ ... \ \forall y_{1,m_1} Q_1), \\ ... \ , & \\ & \forall x_{p,1} \ ... \ \forall x_{p,n_p}(P_p \vee \forall y_{p,1} \ ... \ \forall y_{p,m_p} Q_p) \ \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta \end{array}$$

Preuve : Dans cette preuve on appelera $\forall_{x_r}$ l'ensemble des règles $\forall$-gauche sur $x_{r,1}, ..., x_{r,n_r}$ lorsqu'elles seront regroupées, et $\forall_{y_r}$ la même chose sur $y_{r,1}, ..., y_{r,m_r}$. On fait la démonstration du sens direct et celle du sens inverse séparément.

Le sens direct : nous procédons en trois étapes.

On commence par appliquer le lemme 2.6 pour regrouper tous les $\forall$-gauche. On obtient une démonstration dans laquelle, puisque nos propositions commencent par un quantificateur universel, ces dernières sont décomposées de la manière suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta} \quad \dfrac{\pi'}{\Gamma, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}}{\Gamma, P \vee Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta} \vee\textbf{-l}}{\vdots}}{\vdots}\forall_{\mathbf{y}} - \mathbf{l}}{\Gamma, \forall x_1 ... \forall x_n \forall y_1 ... \forall y_m (P \vee Q) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\forall_{\mathbf{x}} - \mathbf{l}$$

Ayant une démonstration ainsi modifiée nous construisons la démonstration du séquent désiré par récurrence sur cette démonstration.

Si la règle n'est pas $\forall$-gauche sur une proposition de la forme $P \vee Q$, alors on applique l'hypothèse de récurrence.

Si la règle est $\forall$-gauche sur la proposition $P \vee Q$ alors on applique l'hypothèse de récurrence sur π et π' (nous obtenons deux démonstrations, ν et ν' de la forme que nous désirions), puis on assemble ν et ν' en mettant à la suite de ν' les règles $\forall_y$. Ensuite, nous appliquons la règle du $\vee$-gauche, et enfin nous accolons les règles $\forall_x$.
Nous obtenons la démonstration suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\nu}{\Gamma, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\nu'}{\Gamma, Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}}{\vdots}}{\Gamma, \forall y_1 ... \forall y_m Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\forall_{\mathbf{y}} - \mathbf{l}}{\Gamma, P \vee (\ \forall y_1 ... \forall y_m Q\ ) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\vee\textbf{-l}}{\vdots}}{\Gamma, \forall x_1 ... \forall x_n (P \vee (\ \forall y_1 ... \forall y_m Q\ )) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}\forall_{\mathbf{x}} - \mathbf{l}$$

Le fait de remonter $\forall_y$-gauche est valide car $y_{r,1}, ..., y_{r,m_r}$ ne sont pas libres dans P_r.

La réciproque :

Elle se fait toujours par récurrence sur la taille de la preuve.

- Si on rencontre une règle qui ne s'applique pas à une proposition de la forme $\forall x_1 ... \forall x_m (P \vee (\forall y_1 ... \forall y_m Q))$, on applique l'hypothèse de récurrence, et à la démonstration obtenue on applique la même règle.

- Si on rencontre une règle qui s'applique à une proposition de la forme $\forall x_1 ... \forall x_n (P \vee (\forall y_1 ... \forall y_m Q))$, c'est soit :

  - $\forall$-gauche. Dans ce cas, nous appliquons l'hypothèse de récurrence, et obtenons une démonstration de :

  $$\begin{array}{ll} \Gamma, & \forall x_{1,2} \ ... \ \forall x_{1,n_1} (P_1 \vee \forall y_{1,1} \ ... \ \forall y_{1,m_1} Q_1), \\ ... \ , & \\ & \forall x_{p,1} \ ... \ \forall x_{p,n_p} (P_p \vee \forall y_{p,1} \ ... \ \forall y_{p,m_p} Q_p) \ \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta \end{array}$$

  à laquelle nous rajoutons la règle $\forall$-gauche.

  - soit $\vee$-gauche (s'il n'y a pas ou plus de quantificateurs). Nous commençons par appliquer l'hypothèse de récurrence sur les deux prémisses, et obtenons des démonstrations de :

  $$\Gamma', P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$
  $$\Gamma', \forall y_1 ... \forall y_m Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

  où Γ a été modifié en Γ', car les propositions qui nous intéressaient ont été transformées.
  Nous voulons démontrer le séquent suivant :

  $$\Gamma', \forall y_1 ... \forall y_m (P \vee Q) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

  Nous commençons par des règles de **contraction** sur Γ' et Δ de façon à devoir démontrer le séquent :

  $$\Gamma'_*, \Gamma', \forall y_1 ... \forall y_m (P \vee Q) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta_*, \Delta$$

  Nous annotons avec * toutes les propositions sur lesquelles nous venons de faire une contraction.
  Ensuite, nous construisons la démonstration en faisant une récurrence sur la démonstration de $\Gamma', \forall y_1 ... \forall y_m Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$, qui est une des deux prémisses sur lesquelles nous venons d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

  À chaque règle rencontrée, nous appliquons l'hypothèse de récurrence, et nous rajoutons la même règle, sauf dans le cas de la règle $\forall$-gauche sur $\forall y_m Q$ (traité plus bas).
  Nous obtenons alors des démonstrations de la forme suivante :

  $$\Gamma'_*, \Gamma'', \forall y_{p_1}, \ ..., \forall y_m (P \vee Q), \ ..., \forall y_{p_q}, \ ..., \forall y_m (P \vee Q) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'_*, \Delta''$$

la démonstration d'origine étant, elle :

$$\Gamma'_*, \Gamma'', \forall y_{p_1},\ ..., \forall y_m Q,\ ..., \forall y_{p_q},\ ..., \forall y_m Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'_*, \Delta''$$

Nous faisons bien attention de ne pas appliquer les règles sur les propositions étoilées. Nous les conservons ainsi telles quelles jusqu'à rencontrer la règle $\forall$-l sur $\forall y_m Q$.

Quand nous arrivons (par récurrence sur la démonstration d'origine) à une règle $\forall$-gauche sur $\forall y_m Q$, alors on rajoute $\forall$-gauche (qui ne viole pas la condition de fraîcheur des variables) et $\vee$-gauche à la démonstration qu'on construit et on se retrouve à devoir démontrer deux séquents :

$$\Gamma'_*, \Gamma'', P, \forall y_{p_2},\ ..., \forall y_m (P \vee Q),\ ..., \forall y_{p_q},\ ..., \forall y_m (P \vee Q) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'_*, \Delta''$$

$$\Gamma'_*, \Gamma'', Q, \forall y_{p_2},\ ..., \forall y_m (P \vee Q),\ ..., \forall y_{p_q},\ ..., \forall y_m (P \vee Q) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'_*, \Delta''$$

En utilisant plusieures fois la règle **weak** sur le premier séquent, on peut se reporter sur le séquent :

$$\Gamma'_*, P \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'_*$$

dont on a une démonstration (c'est exactement la deuxième prémisse sur laquelle nous avions appliqué l'hypothèse de récurrence).

Il reste à trouver une démonstration de :

$$\Gamma'_*, \Gamma'', Q, \forall y_{p_1},\ ..., \forall y_m (P \vee Q),\ ..., \forall y_{p_q},\ ..., \forall y_m (P \vee Q) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'_*, \Delta''$$

Qu'on peut trouver en appliquant l'hypothèse de récurrence sur la démonstration initiale qui est celle-ci :

$$\Gamma'', Q, \forall y_{p_1},\ ..., \forall y_m Q,\ ...,\ \forall y_{p_q},\ ..., \forall y_m Q \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta''$$

$\diamond$

2.2 La démonstration

Nous allons prouver des propositions plus en rapport avec le théorème, puis finalement, le théorème lui-même.

Lemme 2.11 *Soient $\psi_1, ..., \psi_n$, $\chi_1, ..., \chi_q$ des ensembles de propositions tels que $\{\psi_1, ..., \psi_n\} \to \{\chi_1, ..., \chi_q\}$ au sens du calcul des formes clausales.*
Si

$$\overline{\forall}\chi_1, ..., \overline{\forall}\chi_q \vdash_{\mathcal{RE}} \quad \textit{sans coupures}$$

alors

$$\overline{\forall}\psi_1, ..., \overline{\forall}\psi_n \vdash_{\mathcal{RE}} \quad \textit{sans coupures}$$

Preuve : par récurrence sur la longueur de la dérivation.
Si la dérivation a une longueur nulle, alors nous gardons la même preuve. Sinon, nous distingons des cas selon la règle de calcul employée lors de la première étape de la dérivation.

- On suppose que la règle s'applique sur ψ_1 qui est de la forme

  $$\varphi, P \vee Q \to \varphi, P, Q$$

  Par hypothèse de récurrence on a une démonstration sans coupures de :

  $$\overline{\forall}(\varphi \vee P \vee Q), \overline{\forall}\psi_1, ..., \overline{\forall}\psi_n \vdash_{\mathcal{RE}}$$

  Ce qui est exactement ce que nous cherchions.

- On suppose que la règle s'applique sur ψ_1 qui est de la forme $\varphi, \forall x P^l \to \varphi, P^{l::x}$. On appliquant l'hypothèse de récurrence sur ce dernier ensemble de propositions, puis on applique la proposition de permutation des $\forall$-l 2.7.

- On suppose que la règle s'applique sur ψ_1 qui est de la forme $\{\varphi, P \wedge Q\}$, donc, on a par hypothèse de récurrence une démonstration sans coupures de :

  $$\overline{\forall}(\overline{\varphi} \vee P),\ \overline{\forall}(\overline{\varphi} \vee Q),\ \overline{\forall}\psi_2, ..., \overline{\forall}\psi_n \vdash_{\mathcal{RE}}$$

  On va construire une démonstration de

  $$\overline{\forall}(\overline{\varphi} \vee (P \wedge Q)), \overline{\forall}\psi_2, ..., \overline{\forall}\psi_n \vdash_{\mathcal{RE}}$$

  On commence par appliquer la règle de contraction sur la proposition $\overline{\forall}\varphi \vee (P \wedge Q)$. Notons que les variables quantifiées sont les mêmes, et dans le même ordre pour $\forall(\overline{\varphi} \vee P)$, $\forall(\overline{\varphi} \vee Q)$ et $\forall(\overline{\varphi} \vee (P \wedge Q))$. (D'après la définition 1.16). Sinon, on appliquerait la proposition 2.7 sur les deux propositions que nous venons de contracter.
  Ensuite, on fait une récurrence sur la démonstration d'origine pour construire la démonstration voulue. La contraction effectuée dès le départ nous permet de faire suivre à l'une des propositions contractées le chemin de $\overline{\forall}\varphi \vee P$ et à l'autre, celui de $\overline{\forall}\varphi \vee Q$. Le but est de remplacer dans la démonstration d'origine toutes les propositions dérivant de $\overline{\forall}(\varphi \vee P)$ et de $\overline{\forall}(\varphi \vee Q)$ par $\overline{\forall}(\varphi \vee (P \wedge Q))$

  Pour faire la récurrence, nous considérons les différentes règles. Nous traitons ici le cas le plus significatif, celui de la dernière règle $\forall$-gauche sur $\overline{\varphi} \vee P$ ou sur $\overline{\varphi} \vee Q$ (dans la démonstration de départ).

  Nous appliquons l'hypothèse de récurrence sur la prémisse de cette règle qui est :

  $$\begin{aligned}\Gamma, \varphi \vee P' \quad , \quad & \forall x_{q_1}, ..., \forall x_n(\varphi \vee P_1),\ ..., \forall x_{q_r}, ..., \forall x_n(\varphi \vee P_r), \\ & \forall x_{m_1}, ..., \forall x_n(\varphi \vee Q_1),\ ..., \forall x_{m_p}, ..., \forall x_n(\varphi \vee Q_p) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta\end{aligned}$$

les indices sont là pour tenir compte des réécritures et des contractions.
Nous trouvons donc une démonstration sans coupures et de :

$$\begin{aligned}\Gamma, \varphi \vee P \quad , \quad & \forall x_{q_1}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P_1 \wedge Q)),\ ..., \forall x_{q_r}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P_r \wedge Q)), \\ & \forall x_{m_1}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P \wedge Q_1)),\ ..., \forall x_{m_p}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P \wedge Q_p)) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta\end{aligned}$$

Sur cette dernière démonstration, nous appliquons le lemme de Kleene 2.1 sur $\varphi \vee P$, puis sur la prémisse contenant P, nous affaiblissons sur Q (en introduisant éventuellement plusieures règles si Q n'est pas atomique), nous obtenons les deux démonstrations suivantes :

$$\begin{aligned}\Gamma, \varphi \quad , \quad & \forall x_{q_1}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P_1 \wedge Q)),\ ..., \forall x_{q_r}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P_r \wedge Q)), \\ & \forall x_{m_1}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P \wedge Q_1)),\ ..., \forall x_{m_p}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P \wedge Q_p)) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma, P, Q \quad , \quad & \forall x_{q_1}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P_1 \wedge Q)),\ ..., \forall x_{q_r}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P_r \wedge Q)), \\ & \forall x_{m_1}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P \wedge Q_1)),\ ..., \forall x_{m_p}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P \wedge Q_p)) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta\end{aligned}$$

Les variables libres de Q sont substituées par les variables ou termes de P correspondantes (il faut regarder la liste $\mathbf{l}$ de $(P \wedge Q)^l$ pour définir cette substitution). Sur cette dernière démonstration, nous appliquons la règle du $\wedge$-gauche.
À la suite de quoi nous réunissons ces deux démonstrations avec la règle $\vee$-gauche pour en obtenir une de :

$$\begin{aligned}\Gamma, \varphi \vee (P \wedge Q) \quad , \quad & \forall x_{q_1}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P_1 \wedge Q)),\ ..., \forall x_{q_r}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P_r \wedge Q)), \\ & \forall x_{m_1}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P \wedge Q_1)),\ ..., \forall x_{m_p}, ..., \forall x_n(\varphi \vee (P \wedge Q_p)) \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta\end{aligned}$$

sans coupures ce que nous cherchions.

- Enfin, le dernier cas à considérer est le cas du quantificateur existentiel.
$\psi_1 = \{\varphi, \exists x P^{y_1,...,y_N}\} \to \chi_1 = \{\varphi, \{f(y_1, ..., y_N)/x\} P^{y_1,...,y_N}\}$.
Soient $z_1, ..., z_m$ les variables libres de φ n'étant pas parmi $y_1, ..., y_N$.
Ayant une démonstration de :

$$\overline{\forall}\chi_1, \overline{\forall}\psi_2, ..., \overline{\forall}\psi_n \vdash_{\mathcal{RE}}$$

sans coupures, on a une démonstration de :

$$\forall y_1, ..., \forall y_N, \forall z_1, ..., \forall z_m(\{f(y_1, ..., y_N)/x\} P \vee \overline{\varphi}),\quad \overline{\forall}\psi_2, ..., \overline{\forall}\psi_n \vdash_{\mathcal{RE}}$$

grâce au lemme 2.7 de permutation des $\forall$ à gauche. On applique alors la proposition 2.10 et on obtient une démonstration sans coupures et de :

$$\forall y_1, ..., \forall y_N(\{f(y_1, ..., y_N)/x\} P \vee \forall z_1, ..., \forall z_m \overline{\varphi}),\quad \overline{\forall}\psi_2, ..., \overline{\forall}\psi_n \vdash_{\mathcal{RE}}$$

D'après l'axiome de Skolem, on a aussi :

$$\forall y_1,...,\forall y_N \exists x(P \vee \forall z_1,...,\forall z_m \overline{\varphi}),\quad \overline{\forall}\psi_2,...,\overline{\forall}\psi_n \vdash_{\mathcal{RE}}$$

avec x variable non libre dans $\forall z_1,...,\forall z_m\overline{\varphi}$. On applique la proposition 2.9 pour trouver une démonstration de :

$$\forall y_1,...,\forall y_N (\exists x P \vee \forall z_1,...,\forall z_m \overline{\varphi}),\quad \overline{\forall}\psi_2,...,\overline{\forall}\psi_n \vdash_{\mathcal{RE}}$$

et enfin, on applique une dernière fois la proposition 2.10 pour trouver une démonstration de :

$$\forall y_1,...,\forall y_N, \forall z_1,...,\forall z_m (\exists x P \vee \overline{\varphi}),\quad \overline{\forall}\psi_2,...,\overline{\forall}\psi_n \vdash_{\mathcal{RE}}$$

- Les cas des autres règles se traitent de la même manière que celui des règles dont nous venons de traiter les cas. $\diamond$

Nous conjecturons que la réciproque est vraie aussi à condition de démontrer un lemme de Kleene sur le $\wedge$ à gauche. La seule chose qui change dans cette démonstration est le traitement de la dérivation de ψ_1 lorsque $\psi_1 = \{\varphi, P \wedge Q\}$. Mais nous n'en avons pas besoin pour la suite.

Lemme 2.12 *Si on a une preuve sans coupure et de :*

$$\begin{array}{ll}\Gamma \quad , & \forall x_{1,1}...\forall x_{1,n_1}\, A_1 \vee B_1, ..., \\ & \quad \forall x_{m,1}...\forall x_{m,n_m}\, A_m \vee B_m \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta\end{array}$$

alors on a une preuve sans coupures et de :

$$\begin{array}{ll}\Gamma \quad , & \forall x'_{1,1}...\forall x'_{1,p_1}(A_1 \vee P_1), \forall x''_{1,1}...\forall x''_{1,q_1}(B_1 \vee \neg P_1), \\ & ..., ..., \\ & \forall x'_{m,1}...\forall x'_{m,p_m}(A_m \vee P_m), \forall x''_{m,1}...\forall x''_{m,q_m}(B_m \vee \neg P_m), \\ & \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta\end{array}$$

en quantifiant uniquement sur les variables libres des propositions considérées.

Preuve : on construit tout d'abord par récurrence sur la taille de la preuve initiale une preuve de :

$$\begin{array}{ll}\Gamma \quad , & \forall x_{1,1}...\forall x_{1,n_1}(A_1 \vee P_1), \forall x_{1,1}...\forall x_{1,n_1}(B_1 \vee \neg P_1), \\ & ..., ..., \\ & \forall x_{m,1}...\forall x_{m,n_m}(A_m \vee P_m), \forall x_{m,1}...\forall x_{m,n_m}(B_m \vee \neg P_m), \\ & \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta\end{array}$$

telle que les occurences des variables libres et des termes de A_x, B_x soient les mêmes que dans la démonstration initiale, et que les ocurrences des variables libres et des termes de $P_x, \neg P_x$ soient identiques entre eux.

- Si la règle est une règle sur Γ ou Δ, on applique l'hypothèse de récurrence.
- Si la règle est une contraction sur $\forall x_{1,1}...\forall x_{1,n_1}(A_1 \vee B_1)$, alors on applique l'hypothèse de récurrence et on contracte deux fois, sur $\forall x_{1,1}...\forall x_{1,n_1}(A_1 \vee P_1)$ et sur $\forall x_{1,1}...\forall x_{1,n_1}(B_1 \vee \neg P_1)$.
- Si la règle est une réécriture, on applique l'hypothèse de récurrence, puis on fait intervenir la règle de réécriture deux fois (ou une seule fois si $A' = A$ ou $B' = B$).
- Si la règle est $\forall$-gauche sur $\forall x_{1,1}...\forall x_{1,n_1}(A_1 \vee B_1)$, alors on applique l'hypothèse de récurrence, et on applique deux fois la règle $\forall$-gauche, en substituant x_1 par le même terme deux fois de suite (qui est aussi le terme substitué dans la preuve initiale).
- Si la règle est $\vee$-gauche, alors on applique l'hypothèse de récurrence et on se retrouve avec des démonstrations de :

$$\begin{array}{lcl} \Gamma, A_1 & , & \forall x_{2,1}...\forall x_{2,n_2}(A_2 \vee P_2), \forall x_{2,1}...\forall x_{2,n_2}(B_2 \vee \neg P_2), \\ & & ..., ..., \\ & & \forall x_{m,1}...\forall x_{m,n_m}(A_m \vee P_m), \forall x_{m,1}...\forall x_{m,n_m}(B_m \vee \neg P_m), \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta \end{array}$$

et de :

$$\begin{array}{lcl} \Gamma, B_1 & , & \forall x_{2,1}...\forall x_{2,n_2}(A_2 \vee P_2), \forall x_{2,1}...\forall x_{2,n_2}(B_2 \vee \neg P_2), \\ & & ..., ..., \\ & & \forall x_{m,1}...\forall x_{m,n_m}(A_m \vee P_m), \forall x_{m,1}...\forall x_{m,n_m}(B_m \vee \neg P_m), \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta \end{array}$$

que l'on simplifie pour la suite en :

$$\Gamma', A_1 \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'$$

$$\Gamma', B_1 \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'$$

Dans ce cas là, on a une démonstration triviale de :

$$\Gamma', P_1, \neg P_1 \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'$$

à condition que toutes les occurences variables libres et tous les termes de P_1 et de $\neg P_1$ soient identiques.

Donc on peut construire la preuve suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma', A_1 \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'}}{\Gamma', A_1, \neg P_1, \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'}\text{weak} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma', P_1 \vdash_{\mathcal{RE}} P_1, \Delta'}\text{axiom,weak}}{\Gamma', P_1, \neg P_1 \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'}\neg\text{-l}}{\Gamma', \neg P_1, A_1 \vee P_1 \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'}\vee\text{-l} \quad \dfrac{\dfrac{\pi'}{\Gamma', B_1 \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'}}{\Gamma', B_1, A_1 \vee P_1 \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'}\text{weak}}{\Gamma', B_1 \vee \neg P_1, A_1 \vee P_1 \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'}$$

Ce qui est ce que nous cherchions.

Il faut encore transformer cette démonstration de façon à ne quantifier que sur les variables apparaissant des propositions. Nous supprimons par récurrence sur la taille de la démonstration toutes les quantifications inutiles.

Puis nous rajoutons des règles de quantification sur les variables non encore quantifiées. Et enfin, on applique le lemme **2.7** de permutation des quantificateurs universels. $\diamond$

Lemme 2.13 *On peut construire une preuve sans coupures de :*

$$\Gamma, \forall x_1 \forall y_{1,1} ... \forall y_{1,n_1} U_1, \ ..., \ \forall x_p \forall y_{p,1} ... \forall y_{p,n_p} U_p \ \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

si on a une preuve sans coupures de :

$$\begin{array}{ll} \Gamma \quad , & \forall z_{1,1} ... \forall z_{1,m} \, \forall y_{1,1} ... \forall y_{1,n_1} \, \{x_1 \mapsto t_1\} U_1, ..., \\ & \forall z_{p,1} ... \forall z_{p,m_p} \, \forall y_{p,1} ... \forall y_{p,n_p} \, \{x_p \mapsto t_p\} U_p \ \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta \end{array}$$

où $z_{1,1}, ..., z_{1,m}$ sont les variables libres qui apparaissent dans t_1.

On prouve ce lemme par récurrence sur la taille de la démonstration :

- Si c'est une règle sur Γ ou Δ, on applique l'hypothèse de récurrence.
- Si c'est une règle $\forall$-gauche sur z_{1,m_1}, alors on a le terme t_1 qui est instancié. Donc, on ajoute $\forall$-gauche sur x_1, en substituant x_1 par t_1.
- Si c'est une règle $\forall$-gauche sur $z_{x,1}, ..., z_{x,m_x-1}$, on ne fait rien.
- Si c'est une règle de contraction, on applique l'hypothèse de récurrence. $\diamond$

Lemme 2.14 *Soient $U_1, ..., U_n$ des clauses. Si*

$$U_1, ..., U_n \hookrightarrow \square$$

alors

$$\overline{\forall} U_1, ..., \overline{\forall} U_n \vdash_{\mathcal{RE}} \quad \textit{sans coupures}$$

Preuve : Par récurrence sur la longueur de la dérivation.

- Si nous avons une dérivation de longueur nulle, alors l'une des clauses, U_1 par exemple, est la clause vide, dans ce cas, $\overline{U_1} = \bot$, ce qui nous permet de conclure avec la règle $\bot$-gauche.

- Si la première règle appliquée est **Identical Resolution** sur $U_1 = \{A, P\}, U_2 = \{B, \neg P\}$, nous avons une démonstration de :

$$\overline{\forall}(A \vee B), \overline{\forall} U_1, ..., \overline{\forall} U_n \vdash_{\mathcal{RE}}$$

D'après le lemme 2.12, on a alors une démonstration de :

$$\overline{\forall}(A \vee P), \overline{\forall}(B \vee \neg P), \overline{\forall} U_1, ..., \overline{\forall} U_n \vdash_{\mathcal{RE}}$$

En contractant deux fois, on a la preuve cherchée.

- si la règle appliquée est **Reduction**. Nous supposons qu'elle s'applique à $U_1 \rightarrow_{\mathcal{RE}} \psi$. Nous possédons une dérivation plus courte de :

$$U_1, ..., U_n, U' \hookrightarrow \Box \text{ avec } U' \in cl(\psi)$$

et par hypothèse de récurrence une démonstration sans coupures de :

$$\overline{\forall} U_1, ..., \overline{\forall} U_n, \overline{\forall} U' \vdash_{\mathcal{RE}}$$

En utilisant les règles d'affaiblissement, on peut obtenir :

$$\overline{\forall} U_1, ..., \overline{\forall} U_n,\ \overline{\forall} U', \overline{\forall} U'_1, ..., \overline{\forall} U'_m \vdash_{\mathcal{RE}}$$

avec $cl(\psi) = \{U', U'_1, ..., U'_m\}$
D'après le lemme 2.11, on a donc, puisque
$\{\psi, U_1, ..., U_n\} \rightarrow \{U', U'_1, ..., U'_m, U_1, ..., U_n\}$ au sens des formes clausales :

$$\overline{U_1}, ..., \overline{U_n}, \overline{\psi} \vdash_{\mathcal{RE}}$$

toujours sans coupures. Nous rajoutons une règle de réécriture de U_1 en ψ.

$$\dfrac{\dfrac{\pi}{\overline{\forall} U_1, ..., \overline{\forall} U_n, \overline{\forall} \psi \vdash_{\mathcal{RE}}}}{\overline{\forall} U_1, ..., \overline{\forall} U_n, \overline{\forall} U_1 \vdash_{\mathcal{RE}}} \ \textbf{rewrite} - \textbf{l}$$

qui reste dans le cadre du système R' car $U_1 \rightarrow_{\mathcal{RE}} \psi$ (et non l'inverse). Puis, nous utilisons la contraction gauche, et nous obtenons la preuve cherchée, qui est sans coupures.

- Si la règle est **conversion**, alors on a une preuve de :

$$\overline{\forall} U_1, ..., \overline{\forall} U_n, \overline{\forall} U' \vdash_{\mathcal{RE}}$$

avec $U' =_{\mathcal{E}} U_1$. Donc on peut rajouter une règle de réécriture et avoir une preuve sans coupures de :

$$\overline{\forall} U_1, ..., \overline{\forall} U_n, \overline{\forall} U_1 \vdash_{\mathcal{RE}}$$

On conclut en appliquant la règle de contraction. Car les exposants des propositions restent les mêmes (voir la remarque concernant la règle conversion, page 17)

- Si la règle est **instantiation**, alors on a une preuve de :

  $$\overline{\forall} U_1, ..., \overline{\forall} U_n, \overline{\forall}\{x \mapsto t\} U_1 \vdash_{\mathcal{RE}}$$

  Mais on peut avoir de nouvelles variables quantifiées par la clôture $\overline{\forall}$. On construit donc par récurrence sur cette démonstration une démonstration de :

  $$\overline{\forall} U_1, ..., \overline{\forall} U_n, \overline{\forall} U_1 \vdash_{\mathcal{RE}}$$

  Pour cela nous appliquons du lemme 2.13. On possède donc une démonstration de :

  $$\overline{\forall} U_1, ..., \overline{\forall} U_n, \forall x \overline{\forall} U_1 \vdash_{\mathcal{RE}}$$

  où $\overline{\forall} U_1$ dénote cette fois-ci la clôture par quantification, moins la quantification sur la variable x. Nous appliquons le lemme de permutations des quantificateurs universels 2.7, et nous obtenons une démonstration sans coupures du séquent :

  $$\overline{\forall} U_1, ..., \overline{\forall} U_n, \overline{\forall} U_1 \vdash_{\mathcal{RE}}$$

  Nous le contractons. $\diamond$

Et enfin, pour pouvoir prouver le théorème, un dernier résultat est requis.

Proposition 2.15 *Si*

$$\Gamma, \neg P_1, ..., \neg P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

sans coupures, alors on peut construire

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} P_1, ..., P_n, \Delta$$

sans coupures.

Preuve : par récurrence sur la taille de la démonstration.

- Si la première règle ne s'applique pas à $\neg P_1, ..., \neg P_n$, alors on a des preuves sans coupures de :

  $$\Gamma', \neg P_1, ..., \neg P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta'$$

  et éventuellement

  $$\Gamma'', \neg P_1, ..., \neg P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta''$$

  prémisses de cette règle. Par hypothèse de récurrence, on a donc des preuves sans coupure de $\Gamma' \vdash_{\mathcal{RE}} P_1, ..., P_n, \Delta'$ et éventuellement $\Gamma'' \vdash_{\mathcal{RE}} P_1, ..., P_n, \Delta''$. On peut encore appliquer la règle en question, qui ne concerne que Γ et Δ.

- Si la première règle s'applique à $\neg P_1$ c'est soit :

– Une règle de réécriture, alors : $\neg P_1 \rightarrow_{\mathcal{RE}} \neg P'_1$, car on est dans le système R' et on ne peut réécrire que des atomes. Donc $P_1 \rightarrow_{\mathcal{RE}} P'_1$. Puisque, par hypothèse de récurrence, on a une preuve sans coupures de $\Gamma \vdash P'_1, P_2, ..., P_n\Delta$, nous rajoutons l'étape de réécriture, pour obtenir ce que nous cherchions.
– Une règle $\neg$-l. Nous la supprimons et gardons la preuve de la prémisse, $\Gamma, \neg P_2, ..., \neg P_n \vdash P, \Delta$, à laquelle nous appliquons l'hypothèse de récurrence pour pouvoir conclure.
– Une règle de contraction gauche

$$\frac{\Gamma, \neg P_1, \neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n \vdash \Delta}{\Gamma, \neg P_1, ..., \neg P_n \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta}$$

  Par hypothèse de récurrence nous avons une preuve sans coupures de $\Gamma \vdash P_1, P_1, P_2, ..., P_n\Delta$. Nous y appliquons la règle de contraction - droite cette fois-ci - et nous obtenons une démonstration du séquent cherché.

Les autres règles ne peuvent pas s'appliquer. $\diamond$

Nous sommes enfin prêts à démontrer le théorème de correction, ce qui est facile, grâce aux deux lemmes 2.11, 2.14 et à la proposition 2.15.

Théorème 2.16 (correction)
Soient $P_1, ..., P_n, Q_1, ..., Q_m$ des propositions. Si

$$cl(P_1, ..., P_n, \neg Q_1, ..., \neg Q_m) \hookrightarrow \square$$

alors

$$P_1, ..., P_n \vdash_{\mathcal{RE}} Q_1, ..., Q_m$$

sans coupures.

Démonstration : Par le lemme **2.14** , si nous avons $cl(P_1, ..., P_n, \neg Q_1, ..., \neg Q_m) \hookrightarrow \square$, cela veut dire que :

$$\overline{U_1}, ..., \overline{U_p} \vdash_{\mathcal{RE}} \quad \text{sans coupures}$$

où $\{U_1, ..., U_p\} = cl(P_1, ..., P_n, \neg Q_1, ..., \neg Q_m)$.

Puisque $P_1, ..., P_n, \neg Q_1, ..., \neg Q_m \rightarrow_{\mathcal{RE}} \{U_1, ..., U_p\}$ au sens du calcul des formes clausales, on a, d'après le lemme **2.11** :

$$P_1, ..., P_n, \neg Q_1, ..., \neg Q_m \vdash_{\mathcal{RE}} \quad \text{sans coupures}$$

Nous la transformons en la démontration sans coupures cherchée en utilisant la proposition 2.15 sur la démonstration de $P_1, ..., P_n, \neg Q_1, ..., \neg Q_m \vdash_{\mathcal{RE}}$. Donc on a une démonstration sans coupures de :

$$P_1, ..., P_n \vdash_{\mathcal{RE}} Q_1, ..., Q_m$$

$\diamond$

Chapter 3

Conclusion

Ce théorème démontré, que pouvons nous en faire ? Tout d'abord, dans [1] il est démontré que :

Théorème 3.1 *Soient $P_1, ..., P_n, Q_1, ..., Q_m$ des propositions. Si le séquent :*

$$P_1, ..., P_n \vdash_{\mathcal{RE}} Q_1, ..., Q_n$$

a une preuve sans coupures en déduction modulo, alors :

$$cl(P_1, ..., P_n, \neg Q_1, ..., \neg Q_m) \hookrightarrow \Box$$

dans EIR.

Nous pouvons en conclure que pour *n'importe quel système de réécriture* $\mathcal{RE}$, EIR équivaut aux preuves sans coupures du système. Autrement dit, on a $cl(\Gamma, \neg\Delta) \hookrightarrow \Box$ si et seulement si on a une démonstration sans coupures de $\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$.

Puisque ENAR est équivalent à EIR, on a cette équivalence entre ENAR et les preuves sans coupures de la déduction modulo aussi.

Le résultat de correction de ENAR de Stuber [2] nous dit que pour certains systèmes de réécriture, si on a une démonstration de :

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{RE}} \Delta$$

alors on a :

$$cl(\Gamma, \neg Delta) \hookrightarrow \Box[\mathcal{C}]$$

avec $\mathcal{C}$ ensemble de contraintes résolvable.

Ainsi, puisque toute dérivation en ENAR correspond à une preuve sans coupures en déduction modulo, on a une nouvelle preuve d'élimination des coupures pour tout un ensemble de systèmes de règles de réécriture, pour lesquelles on ne possédait précdemment pas forcément de preuve d'élimination des coupures. C'est ce point qui sera travaillé dans la thèse que je commencerai en Septembre 2002, ainsi que la démonstration de l'axiome de Skolem 2.3.

Bibliography

[1] Gilles Dowek, Thérèse Hardin, Claude Kirchner, *Theorem Proving Modulo*, Rapport de Recherche 3400, INRIA, 1998

[2] Jürgen Stuber, *A Model-based Completeness Proof of Extended Narrowing And Resolution*, In Proc. 1st Int. Joint Conf. on Automated Reasoning (IJCAR-2001), Siena, Italy, June 2001, LNCS 2083, Springer, Pages 195-210.

[3] Gilles Dowek, *Introduction to Proof Theory*, Course notes for the 13th European Summer school in Logic, Language and Information (ESSLLI 2001)