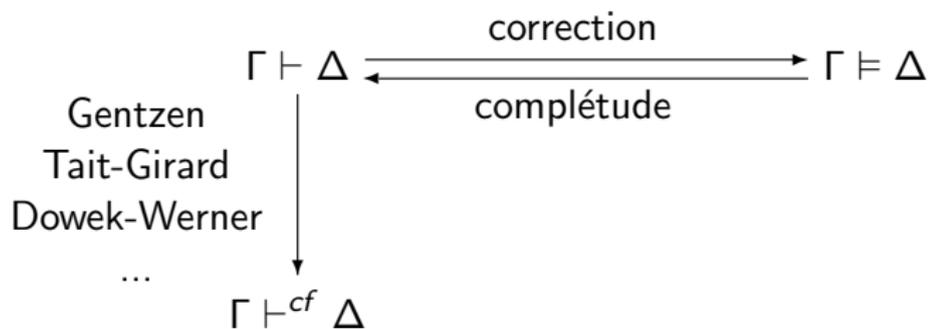


Constructive semantic cut elimination

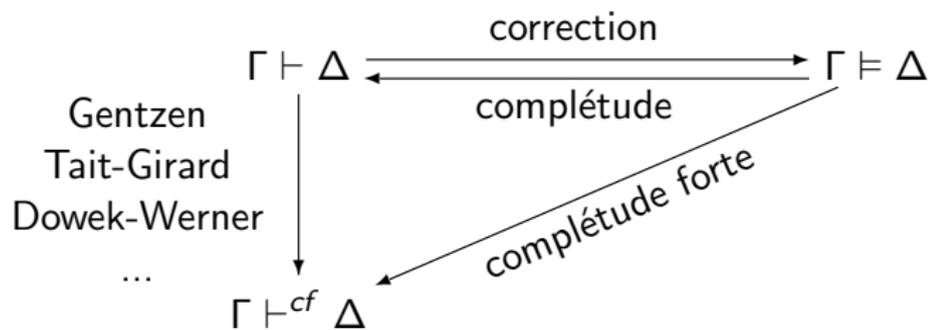
Olivier Hermant

November 10, 2006

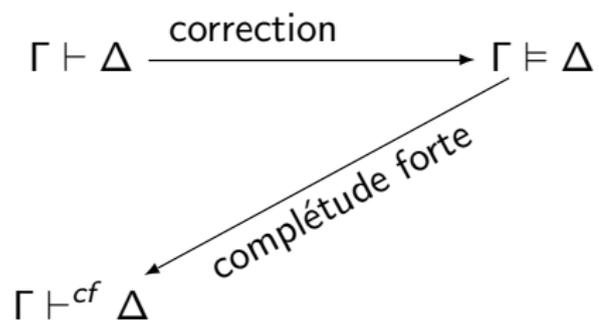
Élimination des coupures sémantique



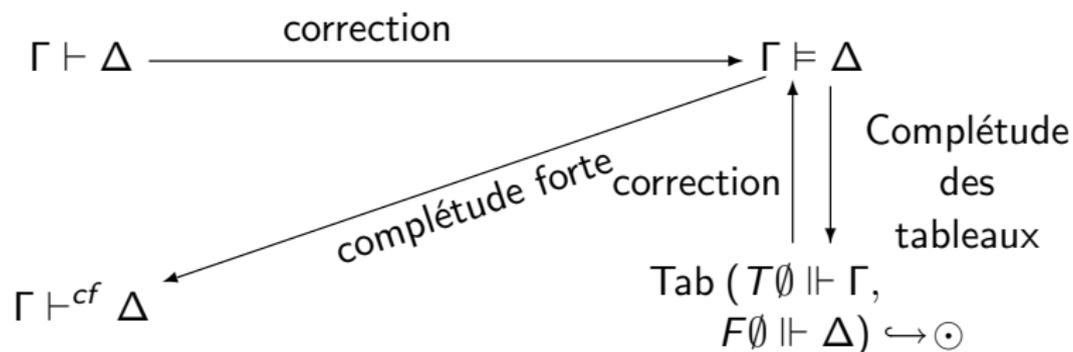
Élimination des coupures sémantique



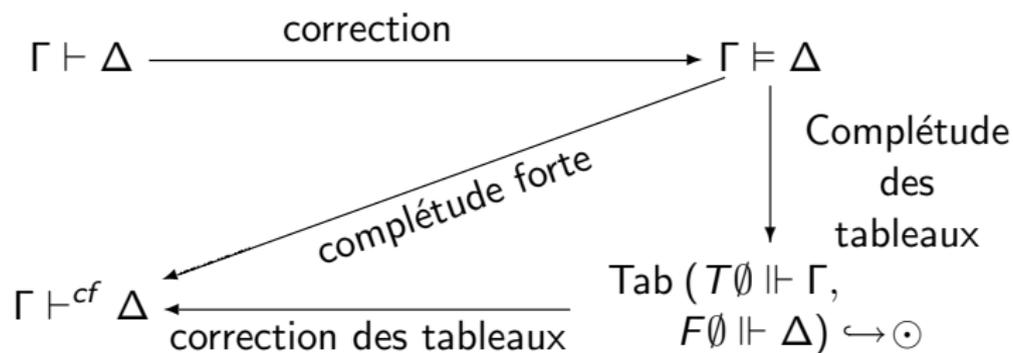
Élimination des coupures sémantique



Élimination des coupures sémantique



Élimination des coupures sémantique



Logique + Règles de Réécriture

- ▶ Le calcul des séquents intuitionniste

Logique + Règles de Réécriture

- ▶ Le calcul des séquents intuitionniste
- ▶ réécriture sur des termes:

$$x + 0 \rightarrow x$$

$$x * 0 \rightarrow 0$$

Logique + Règles de Réécriture

- ▶ Le calcul des séquents intuitionniste
- ▶ réécriture sur des termes:

$$x + 0 \rightarrow x$$

$$x * 0 \rightarrow 0$$

- ▶ réécriture sur des propositions:

$$x * y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

$$P(0) \rightarrow \forall x P(x)$$

Logique + Règles de Réécriture

- ▶ Le calcul des séquents intuitionniste
- ▶ réécriture sur des termes:

$$x + 0 \rightarrow x$$

$$x * 0 \rightarrow 0$$

- ▶ réécriture sur des propositions:

$$x * y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

$$P(0) \rightarrow \forall x P(x)$$

- ▶ Puissance expressive: on peut transformer des axiomes en règles de réécriture.

Le calcul des séquents intuitionniste

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash P} \text{axiom}$$

$$\frac{\Gamma, P, P \vdash Q}{\Gamma, P \vdash Q} \text{contr-l}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash R \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \vee Q \vdash R} \vee\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \Rightarrow Q \vdash R} \Rightarrow\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash Q}{\Gamma, \exists xP \vdash Q} \exists\text{-l, } c \text{ fresh constant}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \text{cut}$$

$$\frac{}{\Gamma, \perp \vdash Q} \perp\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q} \vee\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q} \vee\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q} \Rightarrow\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P}{\Gamma \vdash \exists xP} \exists\text{-r}$$

Le calcul des séquents intuitionniste

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash P} \text{axiom}$$

$$\frac{\Gamma, P, P \vdash Q}{\Gamma, P \vdash Q} \text{contr-l}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash R \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \vee Q \vdash R} \vee\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \Rightarrow Q \vdash R} \Rightarrow\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash Q}{\Gamma, \exists x P \vdash Q} \exists\text{-l, } c \text{ fresh constant}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \text{cut}$$

$$\frac{}{\Gamma, \perp \vdash Q} \perp\text{-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q} \vee\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q} \vee\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q} \Rightarrow\text{-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P}{\Gamma \vdash \exists x P} \exists\text{-r}$$

Le calcul des séquents intuitionniste modulo

On remplace:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \vee\text{-g (LJ)}$$

par:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}} B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} C} \vee\text{-g (LJmod)} C \equiv_{\mathcal{R}} A \wedge B$$

Le calcul des séquents intuitionniste modulo

On remplace:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \vee\text{-g (LJ)}$$

par:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}} B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} C} \vee\text{-g (LJmod)} C \equiv_{\mathcal{R}} A \wedge B$$

La contrainte $C \equiv_{\mathcal{R}} A \wedge B$ est un degré de liberté.

Calcul des séquents intuitionniste modulo

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash Q} \text{axiom } P \equiv_{\mathcal{R}} Q$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \text{cut } P \equiv_{\mathcal{R}} Q$$

$$\frac{\Gamma, P, Q \vdash R}{\Gamma, P \vdash R} \text{contr-}l \quad P \equiv_{\mathcal{R}} Q$$

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash Q} \perp\text{-}l \quad P \equiv_{\mathcal{R}} \perp$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, S \vdash R} \Rightarrow\text{-}l \quad P \Rightarrow Q \equiv_{\mathcal{R}} S$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash S} \Rightarrow\text{-}r \quad P \Rightarrow Q \equiv_{\mathcal{R}} S$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash Q}{\Gamma, R \vdash Q} \exists\text{-}l^* \quad \exists xP \equiv_{\mathcal{R}} R$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P}{\Gamma \vdash R} \exists\text{-}r \quad \exists xP \equiv_{\mathcal{R}} R$$

Calcul des séquents intuitionniste modulo

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash Q} \text{axiom } P \equiv_{\mathcal{R}} Q$$

$$\frac{\Gamma, P, Q \vdash R}{\Gamma, P \vdash R} \text{contr-}l \ P \equiv_{\mathcal{R}} Q$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, S \vdash R} \Rightarrow -l \ P \Rightarrow Q \equiv_{\mathcal{R}} S$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash Q}{\Gamma, R \vdash Q} \exists -l^* \ \exists x P \equiv_{\mathcal{R}} R$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \text{cut } P \equiv_{\mathcal{R}} Q$$

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash Q} \perp -l \ P \equiv_{\mathcal{R}} \perp$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash S} \Rightarrow -r \ P \Rightarrow Q \equiv_{\mathcal{R}} S$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P}{\Gamma \vdash R} \exists -r \ \exists x P \equiv_{\mathcal{R}} R$$

Sémantiques intuitionnistes:

Sémantiques intuitionnistes:

- ▶ algèbres de Heyting [Lipton,Okada]

Sémantiques intuitionnistes:

- ▶ algèbres de Heyting [Lipton,Okada]
- ▶ structures de Kripke

Sémantiques intuitionnistes:

- ▶ structures de Kripke

Une structure de Kripke (KS) est un quadruplet $\langle K, \leq, D, \Vdash \rangle$:

Sémantiques intuitionnistes:

- ▶ structures de Kripke

Une structure de Kripke (KS) est un quadruplet $\langle K, \leq, D, \Vdash \rangle$:

- ▶ K l'ensemble des mondes, ordonné partiellement par \leq

Sémantiques intuitionnistes:

- ▶ structures de Kripke

Une structure de Kripke (KS) est un quadruplet $\langle K, \leq, D, \Vdash \rangle$:

- ▶ K l'ensemble des mondes, ordonné partiellement par \leq
- ▶ $D : \alpha \rightarrow \mathcal{S}et$ une fonction monotone (interprète les termes).

Sémantiques intuitionnistes:

- ▶ structures de Kripke

Une structure de Kripke (KS) est un quadruplet $\langle K, \leq, D, \Vdash \rangle$:

- ▶ K l'ensemble des mondes, ordonné partiellement par \leq
- ▶ $D : \alpha \rightarrow \mathcal{S}et$ une fonction monotone (interprète les termes).
- ▶ \Vdash est une relation entre les mondes et les propositions, qui vérifie entre autres:

Sémantique: les structures de Kripke

- ▶ A atomique: si $\alpha \leq \beta$ et $\alpha \Vdash A$, alors $\beta \Vdash A$.
- ▶ $\alpha \Vdash P \Rightarrow Q$ ssi pour tout $\beta \geq \alpha$ si $\beta \Vdash P$ alors $\beta \Vdash Q$.
- ▶ $\alpha \Vdash \neg P$ ssi pour tout $\beta \geq \alpha$, $\beta \nVdash P$.

- ▶ $\alpha \Vdash P \vee Q$ ssi $\alpha \Vdash P$ ou $\alpha \Vdash Q$.

- ▶ A atomique: si $\alpha \leq \beta$ et $\alpha \Vdash A$, alors $\beta \Vdash A$.
- ▶ $\alpha \Vdash P \Rightarrow Q$ ssi pour tout $\beta \geq \alpha$ si $\beta \Vdash P$ alors $\beta \Vdash Q$.
- ▶ $\alpha \Vdash \neg P$ ssi pour tout $\beta \geq \alpha$, $\beta \nVdash P$.

- ▶ $\alpha \Vdash P \vee Q$ ssi $\alpha \Vdash P$ ou $\alpha \Vdash Q$.

Ce n'est pas une définition faite pour la constructivité: on incruste dans les mondes des valeurs de vérité vrai/faux. Il faut être plus modeste.

Sémantique: les structures de Kripke

- ▶ A atomique: si $\alpha \leq \beta$ et $\alpha \Vdash A$, alors $\beta \Vdash A$.
- ▶ $\alpha \Vdash P \Rightarrow Q$ ssi pour tout $\beta \geq \alpha$ si $\beta \Vdash P$ alors $\beta \Vdash Q$.
- ▶ $\alpha \Vdash \neg P$ ssi pour tout $\beta \geq \alpha$, $\beta \Vdash P$ implique $\beta \Vdash \perp$.
- ▶ $\alpha \Vdash P \vee Q$ ssi $\alpha \Vdash P$ ou $\alpha \Vdash Q$.
- ▶ $\alpha \Vdash \perp$ implique $\beta \Vdash P$ pour toute proposition P , tout monde β (Structure “impropre”).

- ▶ Contrainte supplémentaire:

$$P \equiv_{\mathcal{R}} Q \text{ implique } \alpha \Vdash P \Leftrightarrow \alpha \Vdash Q$$

La méthode des tableaux

- ▶ algorithme de recherche exhaustive de tous les modèles possibles (chaque branche du tableau en représente un).
- ▶ recherche de contre-modèle (non impropre).

- ▶ algorithme de recherche exhaustive de tous les modèles possibles (chaque branche du tableau en représente un).
- ▶ recherche de contre-modèle (non impropre).
- ▶ quelques règles (conditions sur q):

$$\frac{Tp \Vdash A \vee B}{Tp \Vdash A \quad Tp \Vdash B}$$

$$\frac{Tp \Vdash A \Rightarrow B}{Tq \Vdash B \quad Fq \Vdash A}$$

$$\frac{Fp \Vdash A \vee B}{Fp \Vdash A \quad Fp \Vdash B}$$

$$\frac{Fp \Vdash A \Rightarrow B}{Tq \Vdash A \quad Fq \Vdash B}$$

Tableau: exemple 1

Mondes = séquences d'entiers

$$T\emptyset \Vdash A \vee B, F\emptyset \Vdash C \Rightarrow A$$

Tableau: exemple 1

Mondes = séquences d'entiers

$$T\emptyset \Vdash A \vee B, F\emptyset \Vdash C \Rightarrow A$$

Tableau: exemple 1

Mondes = séquences d'entiers

$$T\emptyset \Vdash A \vee B, F\emptyset \Vdash C \Rightarrow A$$

$$T1 \Vdash C$$

$$F1 \Vdash A$$

Tableau: exemple 1

Mondes = séquences d'entiers

$T\emptyset \Vdash A \vee B, F\emptyset \Vdash C \Rightarrow A$

|
 $T1 \Vdash C$

|
 $F1 \Vdash A$

Tableau: exemple 1

Mondes = séquences d'entiers

$T\emptyset \Vdash A \vee B, F\emptyset \Vdash C \Rightarrow A$

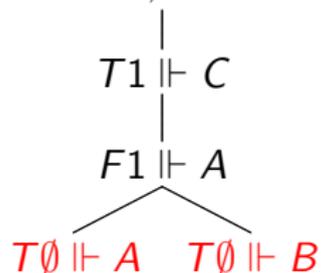


Tableau: exemple 1

Mondes = séquences d'entiers

$T\emptyset \Vdash A \vee B, F\emptyset \Vdash C \Rightarrow A$

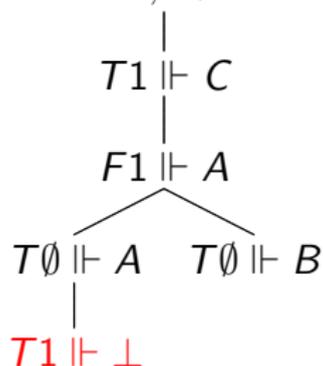


Tableau: exemple 2

$$F_{\emptyset} \Vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B$$

Tableau: exemple 2

$$F_{\emptyset} \Vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B$$

$$\quad \quad \quad |$$
$$T_1 \Vdash (A \Rightarrow B)$$

$$\quad \quad \quad |$$
$$F_1 \Vdash A \Rightarrow B$$

Tableau: exemple 2

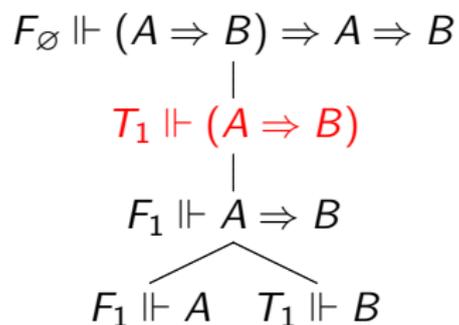


Tableau: exemple 2

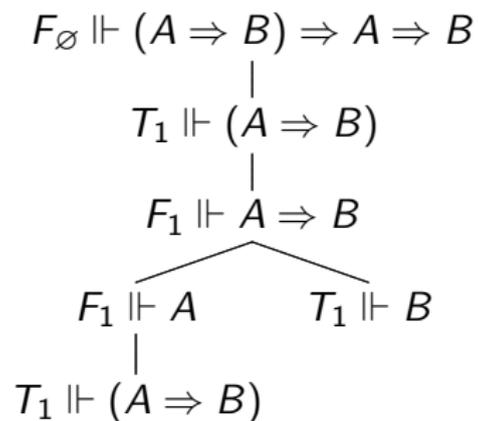


Tableau: exemple 2

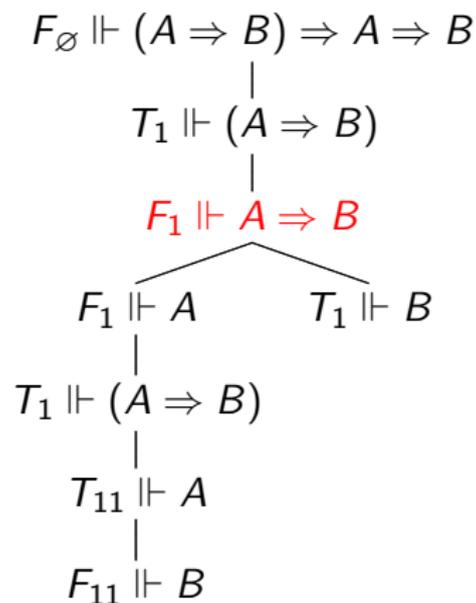


Tableau: exemple 2

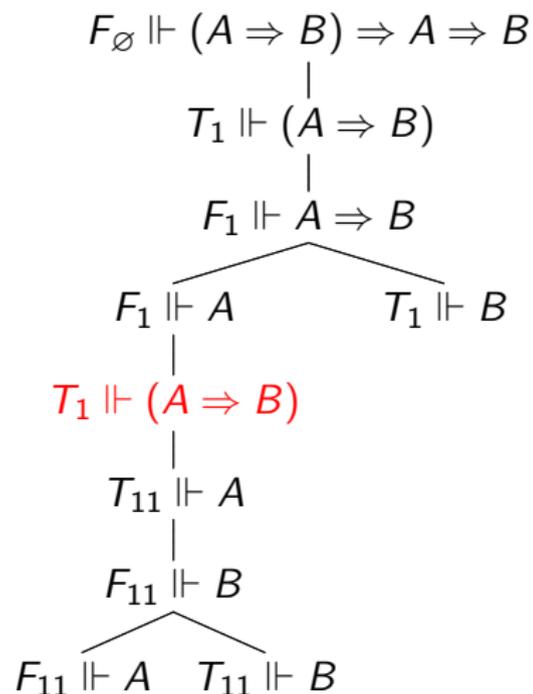


Tableau: exemple 2

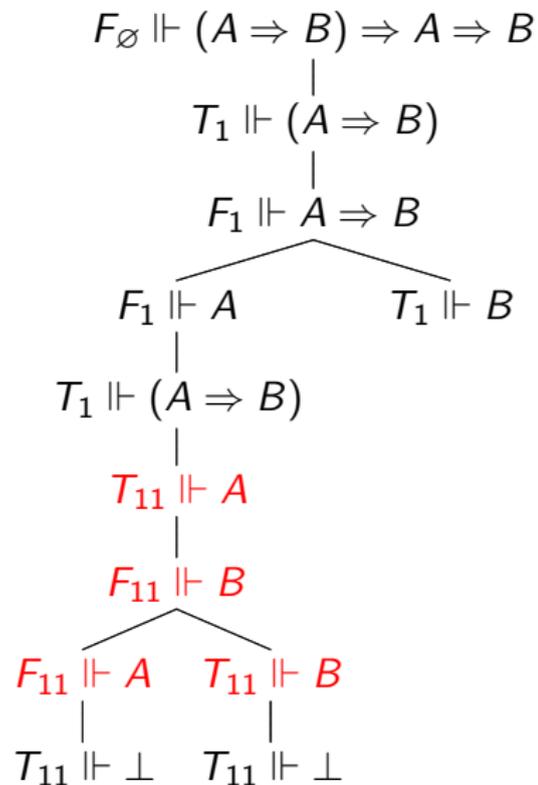
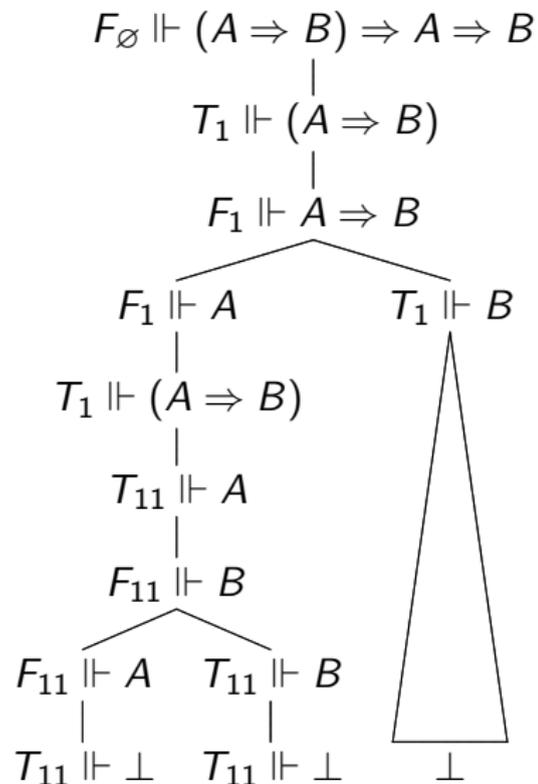


Tableau: exemple 2



On rajoute en plus les règles:

$$T_p \Vdash P$$

|

$$T_p \Vdash Q$$

$$F_p \Vdash P$$

|

$$F_p \Vdash Q$$

dès lors que $P \equiv_{\mathcal{R}} Q$.

Méthode de recherche systématique et complète de preuve:

- ▶ on énumère chacune des assertions sur l'arbre et on les traite équitablement.

On rajoute en plus les règles:

$$T_p \Vdash P$$

|

$$T_p \Vdash Q$$

$$F_p \Vdash P$$

|

$$F_p \Vdash Q$$

dès lors que $P \equiv_{\mathcal{R}} Q$.

Méthode de recherche systématique et complète de preuve:

- ▶ on énumère chacune des assertions sur l'arbre et on les traite équitablement.
- ▶ un nombre infini de fois les assertions $T_p \Vdash \forall x P(x)$.

On rajoute en plus les règles:

$$\begin{array}{ccc} T_p \Vdash P & & F_p \Vdash P \\ | & & | \\ T_p \Vdash Q & & F_p \Vdash Q \end{array} \quad \text{dès lors que } P \equiv_{\mathcal{R}} Q.$$

Méthode de recherche systématique et complète de preuve:

- ▶ on énumère chacune des assertions sur l'arbre et on les traite équitablement.
- ▶ un nombre infini de fois les assertions $T_p \Vdash \forall x P(x)$.
- ▶ on doit aussi assurer une gestion des mondes.

On rajoute en plus les règles:

$$\begin{array}{ccc} T_p \Vdash P & & F_p \Vdash P \\ | & & | \\ T_p \Vdash Q & & F_p \Vdash Q \end{array} \quad \text{dès lors que } P \equiv_{\mathcal{R}} Q.$$

Méthode de recherche systématique et complète de preuve:

- ▶ on énumère chacune des assertions sur l'arbre et on les traite équitablement.
- ▶ un nombre infini de fois les assertions $T_p \Vdash \forall x P(x)$.
- ▶ on doit aussi assurer une gestion des mondes.

DM on travaille uniquement avec des formes normales (attention aux instanciations).

- ▶ une branche décrit-elle un modèle ?

Complétude des tableaux

- ▶ une branche décrit-elle un modèle ?
- ▶ (non constructif): une branche infinie décrit-elle un modèle "propre" ?

Complétude des tableaux

- ▶ une branche décrit-elle un modèle ?
- ▶ (non constructif): une branche infine décrit-elle un modèle "propre" ?
- ▶ définir un modèle à partir d'une branche: celle-ci vérifie certaines propriétés d'exhaustivité.

Complétude des tableaux

- ▶ une branche décrit-elle un modèle ?
- ▶ (non constructif): une branche infinie décrit-elle un modèle "propre" ?
- ▶ définir un modèle à partir d'une branche: celle-ci vérifie certaines propriétés d'exhaustivité.
- ▶ prouver que le modèle est en accord avec la branche:

$$Tp \Vdash P \quad \text{implique} \quad p \Vdash P$$

Complétude des tableaux

- ▶ une branche décrit-elle un modèle ?
- ▶ (non constructif): une branche infinie décrit-elle un modèle "propre" ?
- ▶ définir un modèle à partir d'une branche: celle-ci vérifie certaines propriétés d'exhaustivité.
- ▶ prouver que le modèle est en accord avec la branche:

$$T_p \Vdash P \quad \text{implique} \quad p \Vdash P$$

- ▶ Puisque $\Gamma \models P$ et chaque branche décrit un modèle tel que $T_\emptyset \Vdash \Gamma$ et $F_\emptyset \Vdash P$: le modèle décrit est impropre: **les branches sont finies.**

Complétude des tableaux

- ▶ une branche décrit-elle un modèle ?
- ▶ (non constructif): une branche infinie décrit-elle un modèle "propre" ?
- ▶ définir un modèle à partir d'une branche: celle-ci vérifie certaines propriétés d'exhaustivité.
- ▶ prouver que le modèle est en accord avec la branche:

$$Tp \Vdash P \quad \text{implique} \quad p \Vdash P$$

- ▶ Puisque $\Gamma \models P$ et chaque branche décrit un modèle tel que $T_\emptyset \Vdash \Gamma$ et $F_\emptyset \Vdash P$: le modèle décrit est impropre: **les branches sont finies**.
- ▶ en Déduction Modulo: prouver que le modèle est un modèle des règles de réécriture.

Conditions sur les règles de réécriture

Sous l'hypothèse de confluence et pour:

- ▶ Une condition d'ordre: \succ est bien-fondé, possède la propriété de la sous-formule, et si $P \rightarrow^* Q$ alors $P \succ Q$.

la méthode de tableaux est complète.

Conditions sur les règles de réécriture

Sous l'hypothèse de confluence et pour:

- ▶ Une condition d'ordre: \succ est bien-fondé, possède la propriété de la sous-formule, et si $P \rightarrow^* Q$ alors $P \succ Q$.
- ▶ Une condition de positivité: si $A \rightarrow P$ alors P a des occurrences d'atomes uniquement positives.

la méthode de tableaux est complète.

Conditions sur les règles de réécriture

Sous l'hypothèse de confluence et pour:

- ▶ Une condition d'ordre: \succ est bien-fondé, possède la propriété de la sous-formule, et si $P \rightarrow^* Q$ alors $P \succ Q$.
- ▶ Une condition de positivité: si $A \rightarrow P$ alors P a des occurrences d'atomes uniquement positives.
- ▶ Une condition de positivité étendue: on peut classer les atomes en deux classes, les "positifs" et les "négatifs".

la méthode de tableaux est complète.

Conditions sur les règles de réécriture

Sous l'hypothèse de confluence et pour:

- ▶ Une condition d'ordre: \succ est bien-fondé, possède la propriété de la sous-formule, et si $P \rightarrow^* Q$ alors $P \succ Q$.
- ▶ Une condition de positivité: si $A \rightarrow P$ alors P a des occurrences d'atomes uniquement positives.
- ▶ Une condition de positivité étendue: on peut classer les atomes en deux classes, les "positifs" et les "négatifs".
- ▶ Les deux conditions ensemble: $\mathcal{R}_\succ \cup \mathcal{R}_+$. À condition que ces deux derniers soient compatibles.

la méthode de tableaux est complète.

Conditions sur les règles de réécriture

Sous l'hypothèse de confluence et pour:

- ▶ Une condition d'ordre: \succ est bien-fondé, possède la propriété de la sous-formule, et si $P \rightarrow^* Q$ alors $P \succ Q$.
- ▶ Une condition de positivité: si $A \rightarrow P$ alors P a des occurrences d'atomes uniquement positives.
- ▶ Une condition de positivité étendue: on peut classer les atomes en deux classes, les "positifs" et les "négatifs".
- ▶ Les deux conditions ensemble: $\mathcal{R}_\succ \cup \mathcal{R}_+$. À condition que ces deux derniers soient compatibles.
- ▶ La règle:

$$R \in R \rightarrow_{\mathcal{R}} \forall y (\forall x (y \in x \Rightarrow R \in x) \Rightarrow (y \in R \Rightarrow (A \Rightarrow A)))$$

la méthode de tableaux est complète.

Correction des tableaux

On prouve le théorème suivant:

Théorème

Si le tableau de $T\emptyset \Vdash \Gamma, F\emptyset \Vdash P$ a toutes ses branches fermées, alors on peut en tirer une preuve de $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} P$.

- ▶ cela pose une difficulté: dans un tableau, on peut avoir plusieurs formules “fausses”:

$$\begin{array}{c} F\emptyset \Vdash P \vee Q \\ | \\ F\emptyset \Vdash P \\ | \\ F\emptyset \Vdash Q \end{array}$$

On doit autoriser plusieurs formules à droite d'un séquent.

Correction des tableaux

On prouve le théorème suivant:

Théorème

Si le tableau de $T\emptyset \Vdash \Gamma, F\emptyset \Vdash P$ a toutes ses branches fermées, alors on peut en tirer une preuve de $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} P$.

- ▶ cela pose une difficulté: dans un tableau, on peut avoir plusieurs formules “fausses”:

$$\begin{array}{c} F\emptyset \Vdash P \vee Q \\ | \\ F\emptyset \Vdash P \\ | \\ F\emptyset \Vdash Q \end{array}$$

On doit autoriser plusieurs formules à droite d'un séquent.

- ▶ on doit pouvoir dériver la règle suivante:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee C}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee (B \wedge C)}$$

- on doit pouvoir dériver la règle suivante:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee C}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee (B \wedge C)}$$

- ▶ on doit pouvoir dériver la règle suivante:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee C}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee (B \wedge C)}$$

- ▶ facile avec la coupure:

$$\frac{\frac{\Gamma, A \vee B, A \vee C \vdash_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C) \quad \Gamma, A \vee B \vdash_{\mathcal{R}} A \vee C}{\Gamma, A \vee B \vdash_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C)}}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C)} \quad \text{coupure}$$

- ▶ on doit pouvoir dériver la règle suivante:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee C}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee (B \wedge C)}$$

- ▶ facile avec la coupure:

$$\frac{\frac{\Gamma, A \vee B, A \vee C \vdash_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C) \quad \Gamma, A \vee B \vdash_{\mathcal{R}} A \vee C}{\Gamma, A \vee B \vdash_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C)}}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C)} \quad \text{coupure}$$

- ▶ on doit pouvoir dériver la règle suivante:

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee C}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee (B \wedge C)}$$

- ▶ facile avec la coupure:

$$\frac{\frac{\Gamma, A \vee B, A \vee C \vdash_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C) \quad \Gamma, A \vee B \vdash_{\mathcal{R}} A \vee C}{\Gamma, A \vee B \vdash_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C)}}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A \vee (B \wedge C)} \text{ coupure}$$

- ▶ Sans coupure, montrer le lemme:

$$\begin{array}{l} \Gamma_1 \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee B \quad \Gamma_2 \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee C \\ \text{alors} \quad \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee (B \wedge C) \end{array}$$

Élimination des coupures

On a fait le tour:

- ▶ Correction du calcul des séquents (induction simple):

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} P \Rightarrow \Gamma \vDash P$$

- ▶ Complétude des tableaux intuitionnistes:

$$\Gamma \vDash P \Rightarrow T_{\emptyset} \Vdash \Gamma, F_{\emptyset} \Vdash P \leftrightarrow \perp$$

- ▶ Correction (forte) des tableaux intuitionnistes:

$$T_{\emptyset} \Vdash \Gamma, F_{\emptyset} \Vdash P \leftrightarrow \perp \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} P$$

On obtient:

Élimination des coupures

On a fait le tour:

- ▶ Correction du calcul des séquents (induction simple):

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} P \Rightarrow \Gamma \vDash P$$

- ▶ Complétude des tableaux intuitionnistes:

$$\Gamma \vDash P \Rightarrow T_{\emptyset} \Vdash \Gamma, F_{\emptyset} \Vdash P \leftrightarrow \perp$$

- ▶ Correction (forte) des tableaux intuitionnistes:

$$T_{\emptyset} \Vdash \Gamma, F_{\emptyset} \Vdash P \leftrightarrow \perp \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} P$$

On obtient:

- ▶ correction/complétudes des tableaux modulo.

Élimination des coupures

On a fait le tour:

- ▶ Correction du calcul des séquents (induction simple):

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} P \Rightarrow \Gamma \vDash P$$

- ▶ Complétude des tableaux intuitionnistes:

$$\Gamma \vDash P \Rightarrow T_{\emptyset} \Vdash \Gamma, F_{\emptyset} \Vdash P \leftrightarrow \perp$$

- ▶ Correction (forte) des tableaux intuitionnistes:

$$T_{\emptyset} \Vdash \Gamma, F_{\emptyset} \Vdash P \leftrightarrow \perp \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} P$$

On obtient:

- ▶ correction/complétudes des tableaux modulo.
- ▶ preuve constructive sémantique d'élimination des coupures.

Revenons sur la règle:

$$R \in R \rightarrow_{\mathcal{R}} \forall y (\forall x (y \in x \Rightarrow R \in x) \Rightarrow (y \in R \Rightarrow (A \Rightarrow A)))$$

- ▶ ce ne peut pas être un algorithme de normalisation.

Revenons sur la règle:

$$R \in R \rightarrow_{\mathcal{R}} \forall y (\forall x (y \in x \Rightarrow R \in x) \Rightarrow (y \in R \Rightarrow (A \Rightarrow A)))$$

- ▶ ce ne peut pas être un algorithme de normalisation.
- ▶ c'est grosso-modo la méthode des tableaux décrite.